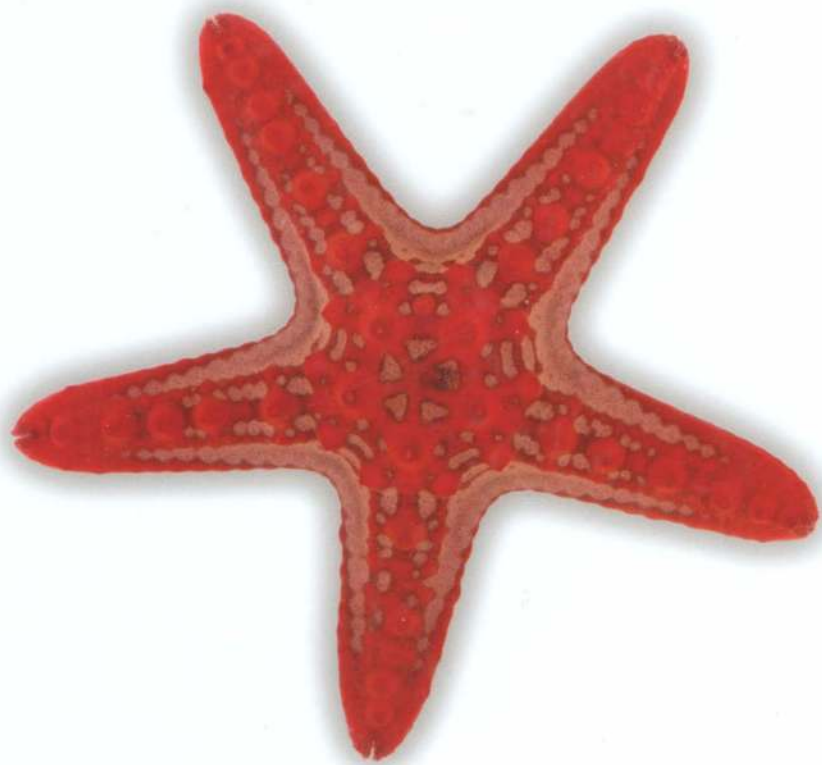


La proporción áurea

El lenguaje matemático de la belleza

Fernando Corbalán



El mundo es matemático

La proporción áurea

El lenguaje matemático de la belleza

¿Puede la belleza expresarse en términos matemáticos? Desde antiguo, la proporción áurea se ha relacionado con la armonía en el arte y la naturaleza, hasta el punto de merecer el apelativo de "divina". La encontramos en la sonrisa de La Gioconda, pero también en los pétalos de las rosas, en la forma de algunos animales o en los brazos en espiral de las galaxias.

La proporción áurea

El lenguaje matemático de la belleza

Fernando Corbalán

El mundo es matemático

© 2010, Fernando Corbalán por el texto
© 2010, RBA Coleccionables S.A.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Babel, disseny i maquetació, S.L.

Créditos fotográficos: age fotostock, Aisa, Album, Corbis,
Getty Images, iStockphoto

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta
publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida
por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN: 978-84-473-6623-1

Depósito legal: B-2047-2010

Impreso por Printer Industria Gráfica Newco, S.L.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio	7
Capítulo 1. El número de oro	9
Un mundo áureo	11
El secreto de las rosas	13
Los números	18
La definición del número áureo	21
Propiedades elementales del número áureo	25
La sucesión de Fibonacci	31
Relaciones numéricas sorprendentes	36
Suma de los términos de la sucesión de Fibonacci	37
Las ternas pitagóricas	38
Relación entre los términos de la sucesión de Fibonacci	41
El término general de la sucesión de Fibonacci	43
El triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci	44
Números primos en la sucesión de Fibonacci	45
Capítulo 2. El rectángulo áureo	47
División de un segmento en media y extrema razón	47
La forma de los rectángulos y el número áureo	49
Reconocer y construir un rectángulo áureo	51
Construcción de un rectángulo áureo	55
Propiedades del rectángulo áureo	56
Otros rectángulos notables	59
Rectángulo $\sqrt{2}$	59
El rectángulo de plata $1 + \sqrt{2}$	61
El rectángulo cordobés	61
Las espirales y el número de oro	62
Capítulo 3. El número de oro y el pentágono	67
El pentágono regular	67
El triángulo áureo	72
El simbolismo de la estrella pentagonal	74
Embaldosados periódicos y no periódicos	76

Los «mosaicos de Penrose»	83
Juegos con el pentágono estrellado y la proporción áurea	86
Los poliedros y el número áureo	88
 Capítulo 4. Belleza y perfección en el arte	 95
La divina proporción de Luca Pacioli	96
Leonardo: la perfección áurea	99
Las medidas ideales	102
El número de oro en la pintura	103
La proporción áurea en la arquitectura	113
Arquitectura contemporánea	117
Le Corbusier	119
La proporción áurea en el diseño	122
 Capítulo 5. El número áureo y la naturaleza	 125
Crecer conservando la forma	125
La proporción áurea en los seres vivos	126
La filotaxis y la proporción áurea	127
Flores y pétalos	134
El nautilus	135
Los fractales y el número áureo	136
El fractal llamado «copo de nieve»	137
Final de trayecto	142
 Anexo. Textos originales	 143
 Bibliografía	 155
 Índice analítico	 157

Prefacio

Ahora más que nunca el mundo en el que vivimos se levanta sobre los números, algunos de los cuales tienen incluso nombre propio: el número pi (π), el número e ... De todo el conjunto de números notables hay uno especialmente interesante: 1,6180339887... Resulta curioso saber que esta modesta cifra ha fascinado a lo largo de la historia a muchas más mentes brillantes que pi y e . Durante siglos ha recibido denominaciones de lo más llamativas: número de oro, proporción trascendental, número divino, divina proporción, etc. El número de oro, que se representa con la letra griega Φ (*phi*), habita un territorio de relaciones y propiedades numéricas increíbles, pero también de conexiones insospechadas entre la naturaleza y las creaciones humanas. Este libro pretende ser una guía de viaje al país del número divino, donde descubrir sus bellezas y saber cómo apreciarlas.

El volumen arranca con un repaso a las múltiples perspectivas del número de oro en la ciencia y el arte de todas las épocas, así como al papel que desempeña en la morfología de animales y plantas. Una vez conseguida cierta familiaridad con la divina proporción estaremos preparados para zambullirnos en sus peculiaridades numéricas y en su apasionante génesis. Viajaremos de las páginas de los *Elementos* de Euclides —el mayor *best seller* científico de todas las épocas— a las ajetreadas calles de la Florencia renacentista para encontrarnos con su hijo más célebre, Leonardo.

Una de las maravillas de la proporción áurea es su inagotable capacidad de generar figuras de gran belleza y asombrosas propiedades, tales como los polígonos rectángulos o los polígonos regulares. Tras estos nombres tan intimidatorios se esconden, en realidad, objetos geométricos cotidianos, como las tarjetas de crédito o las estrellas de cinco puntas. Las primeras constituyen un ejemplo muy a mano de los denominados «rectángulos áureos», aquellos cuyos lados guardan entre sí la divina proporción. ¡Llevamos en el bolsillo una chispa de «divinidad»! Y si los rectángulos áureos son comunes, ¿qué decir de las estrellas pentagonales, o de las espirales? Todas ellas están vinculadas de un modo muy directo a la proporción áurea, y asoman aquí y allá en construcciones, mosaicos y juegos de todo tipo.

Pero si algo en verdad resulta asombroso es la vinculación del número divino con conceptos tan complejos y que tanto han estremecido a la humanidad como la belleza y la perfección. En esta aventura apasionante se cuenta con unos guías de auténtico lujo: Leonardo, Le Corbusier y muchos otros grandes personajes que se han rendido a la armonía de Φ . Si alejamos nuestra mirada de los trabajos del hombre y la posamos en la naturaleza que nos rodea, también allí nos espera, enigmática

y sonriente, la proporción áurea. El crecimiento de muchos seres vivos sigue las pautas marcadas por ella, e incluso los fractales, unos recién llegados al universo de la ciencia, exhiben propiedades que los vinculan con la divina proporción.

Nuestro viaje por el más asombroso de los números se completa con una selección de libros que permitirán profundizar en el conocimiento de la proporción áurea a quien lo desee, junto con un índice analítico que le puede ayudar a moverse con facilidad por el libro.

El número de oro

*«Los sentidos se deleitan con las cosas
que tienen las proporciones correctas.»*

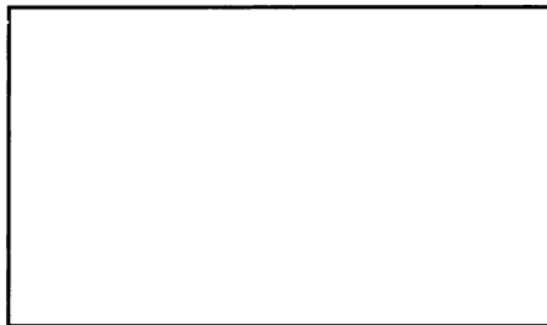
Santo Tomás de Aquino (1225-1274)

¿Qué tienen en común fenómenos naturales tan dispares como la disposición de las semillas de una flor de girasol, la elegante espiral dibujada por las conchas de algunos moluscos y los brazos de la galaxia que nos acoge, la Vía Láctea? ¿Qué pauta geométrica de insuperable armonía se esconde en la obra de grandes artistas y arquitectos, desde Vitruvio a Le Corbusier pasando por Leonardo y Salvador Dalí? Aunque parezca increíble, la respuesta a estos dos interrogantes es un simple número; una cifra de apariencia humilde, conocida desde la Antigüedad, cuya continua aparición en toda clase de manifestaciones naturales y artísticas le ha merecido apelativos tales como «divina proporción», «número de oro» o «proporción áurea». Reproducir esa cifra en letra impresa resultaría literalmente imposible, y no porque sea excesivamente grande —de hecho, es apenas mayor que 1—, sino porque está compuesta por un número infinito de dígitos que, además, no siguen pauta alguna. Descartada su reproducción literal, podemos ayudarnos de la notación aritmética para conocerla. El número de oro se torna así algo mucho más manejable:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339887.$$

Más adelante, en este mismo capítulo, veremos cómo llegar a esta expresión, pero hay que reconocer que, al menos a primera vista, la «divina proporción» resulta poco impresionante. Un ojo entrenado, sin embargo, sabría que hay gato encerrado sólo con ver la raíz de cinco. En efecto, esta raíz presenta una serie de propiedades que le merecieron, a ella y a otras similares, el poco amable apelativo de «irrationales»; una clase especial de números de los que también hablaremos detenidamente.

Vamos a intentar otra aproximación al número de oro, esta vez geométrica, en la búsqueda de su supuesto carácter divino. Para ello, dibujamos un rectángulo cuyo lado más largo es el resultado de multiplicar el corto por 1,618; es decir, un rectángulo la *proporción* de cuyos lados es el número de oro (en este caso, un valor muy próximo). Si lo hacemos correctamente, nos tiene que resultar algo parecido a lo siguiente:



Un rectángulo de estas características recibe el nombre de áureo. En primera instancia puede parecernos un rectángulo de lo más convencional. Hagamos, sin embargo, un sencillo experimento con dos tarjetas de crédito cualquiera. Si disponemos una de ellas de forma horizontal y la otra vertical y las alineamos por sus bases, se observará lo siguiente:

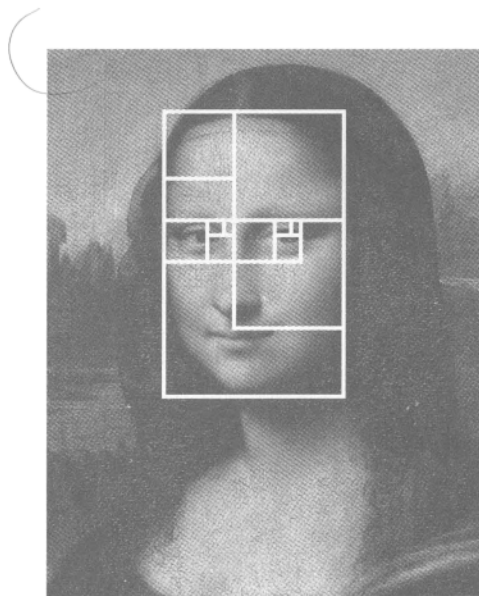


En efecto, al trazar la diagonal de la tarjeta horizontal y prolongarla, podremos comprobar con creciente admiración que coincide exactamente con el vértice superior derecho de la tarjeta vertical. Si hacemos la prueba con dos libros de un mismo tamaño, en especial libros técnicos o ediciones de bolsillo, es muy probable que demos con el mismo resultado. Esta propiedad es exclusiva de los rectángulos

áureos del mismo tamaño, de lo que se deduce que muchos objetos cotidianos de forma rectangular se han diseñado con la divina proporción en mente. ¿Casualidad? Tal vez. O quizás resulta que los rectángulos y demás formas geométricas que guardan esta proporción son, por alguna razón, especialmente agradables a la vista. Si apostamos por esta última posibilidad, nos encontraremos en compañía de nombres ilustres de la pintura y la arquitectura de todas las épocas, como se verá en más detalle en el capítulo 4. No es ninguna coincidencia que la denominación moderna del número de oro, la letra griega *phi* (Φ), sea también la inicial del arquitecto clásico por antonomasia, el legendario Fidias.

Un mundo áureo

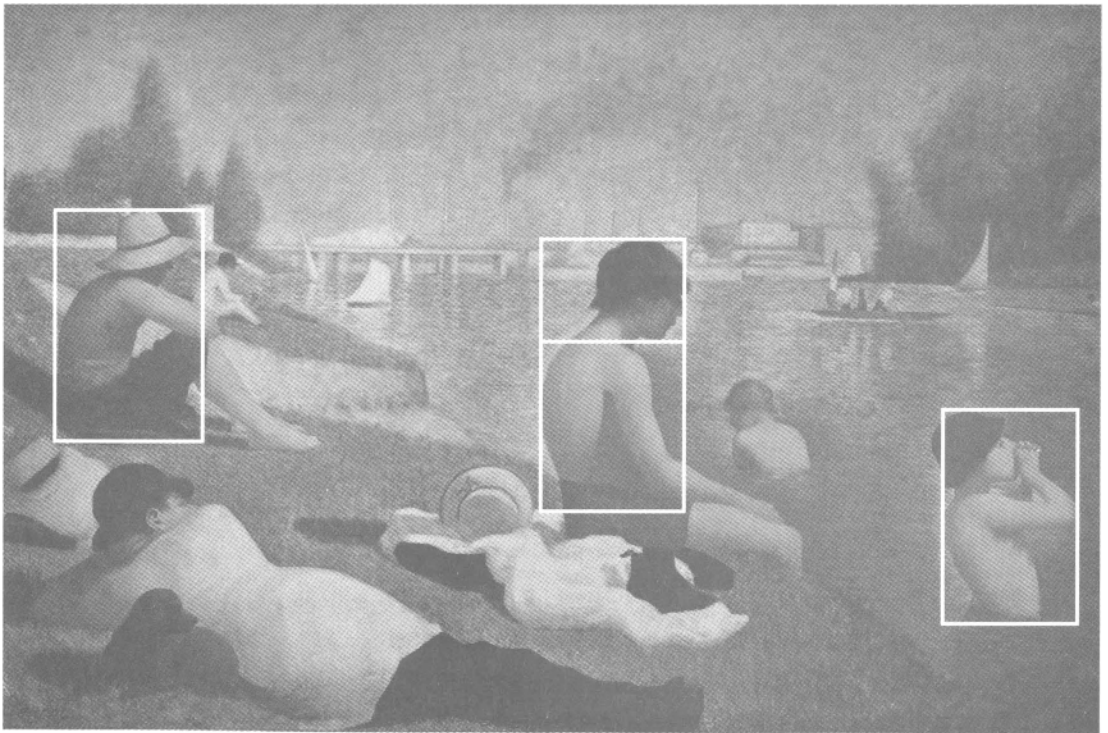
Mucho se ha escrito sobre el misterio que oculta la sonrisa más célebre de la historia del arte, pero además se puede aventurar una solución geométrica al enigma. Veamos qué ocurre si superponemos varios rectángulos áureos sobre el rostro de la bella Gioconda:



¿Tenía en mente Leonardo la proporción áurea a la hora de realizar su obra maestra? Afirmarlo resultaría aventurado. Menos polémico es aseverar que el genio florentino concedía gran importancia a la relación entre la estética y la matemática. Dejaremos la cuestión en el aire por el momento, no sin antes mencionar que Leonardo realizó las

ilustraciones de una obra de contenido estrictamente matemático, escrita por su buen amigo Luca Pacioli, llamada *De divina proportione*, es decir, «La divina proporción».

Leonardo no es, desde luego, el único artista en cuya obra se deja ver la razón áurea y sus distintas manifestaciones, ya sea como razón entre los lados de un rectángulo o en formas geométricas de mayor complejidad. Numerosos pintores posteriores han recurrido a estos fundamentos teóricos, como por ejemplo el neoimpresionista Georges Seurat o el prerrafaelita Edward Burne-Jones. Por su parte, Salvador Dalí realizó con su lienzo dedicado a *La última cena* una obra extraordinaria, en la que la divina proporción posee gran protagonismo. No sólo es el lienzo, de 268 por 167 cm, un rectángulo áureo casi perfecto, sino que, presidiendo la sagrada escena, se alza un monumental dodecaedro. Y es que los sólidos regulares que, como éste, quedan perfectamente inscritos en una esfera, están íntimamente relacionados con el número de oro, como veremos en el tercer capítulo.



El lienzo Une baignade à Asnières (1884) de Georges Seurat es un recuadro áureo. Algunos elementos que lo forman también están insertos en recuadros áureos, tal como muestran las líneas sobrepuestas.

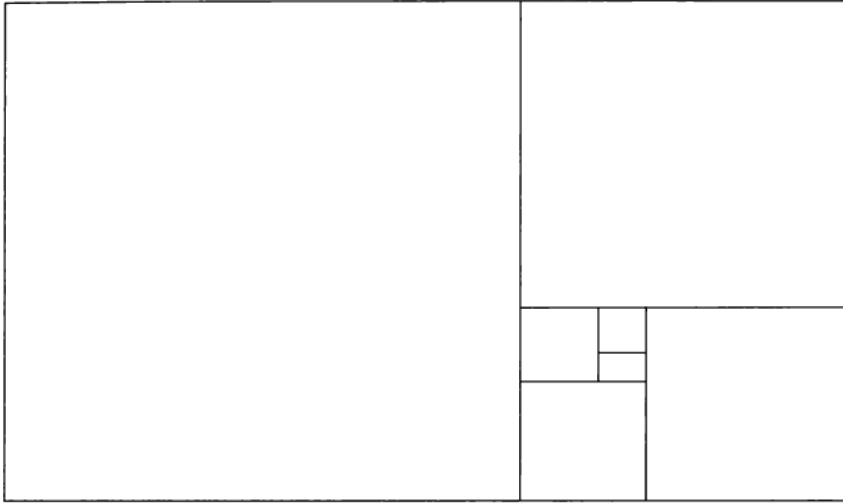
Acerquémonos ahora a la reina de las artes aplicadas, la arquitectura. Si es cierto que la proporción áurea encierra una noción de armonía de valor universal, deberíamos encontrarla también en los trazos geométricos que subyacen en edificios y construcciones. ¿Es así? Otra vez resulta arriesgado afirmarlo con rotundidad. Como una dama coqueta que gustara de hurtar sus encantos, la razón áurea anuncia su presencia en muchas grandes obras arquitectónicas de todas las épocas, como la Gran Pirámide o algunas de las más notables catedrales góticas francesas, sin revelarse de un modo concluyente. Sin embargo, resulta difícil mantenerse escéptico cuando se examina con detalle la fachada de la obra maestra de Fidias, el Partenón, y se descubre con asombro que sus diversos elementos pueden descomponerse limpiamente en rectángulos áureos.



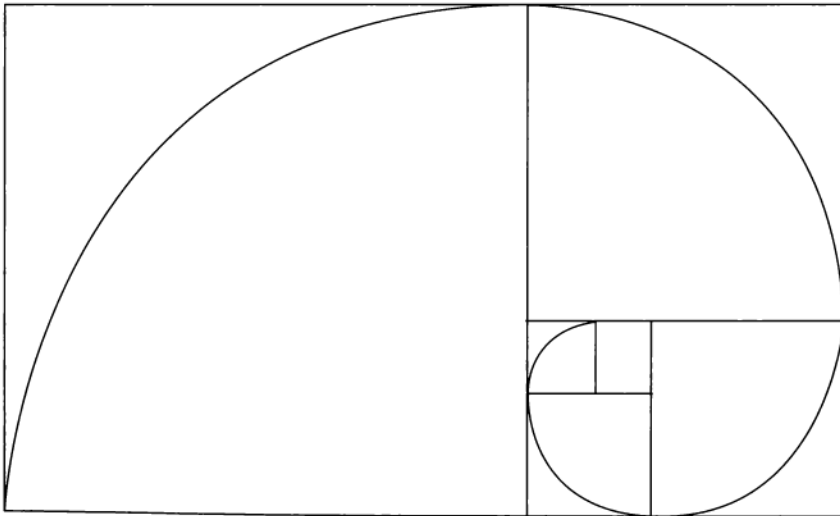
El secreto de las rosas

El valor del número de oro como patrón ideal de belleza no es únicamente una veleidad humana. La naturaleza misma parece otorgar a Φ un papel especial a la hora de «escoger» ciertas formas por encima de otras, aunque para percatarse de ello se debe profundizar algo más en las propiedades del número de oro. Tomemos

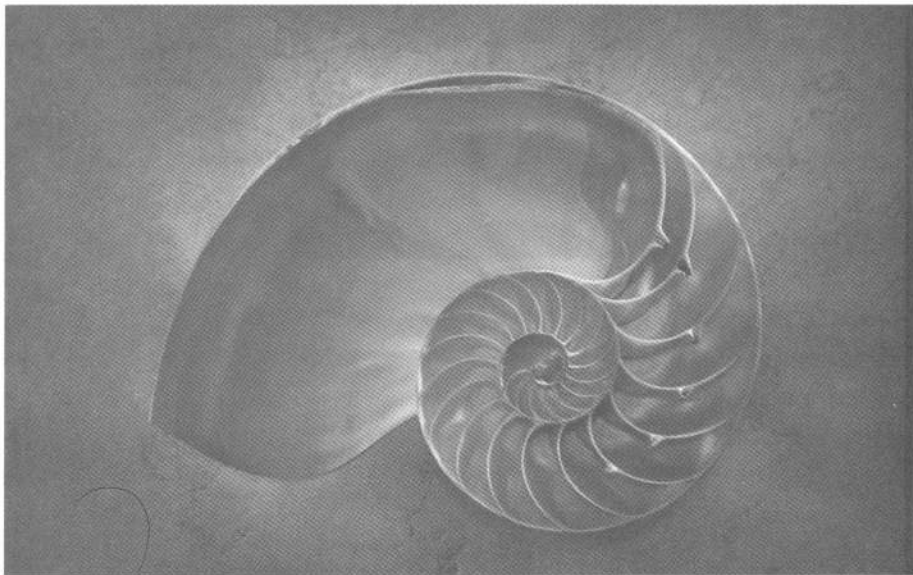
a nuestro ya conocido rectángulo áureo y, partiendo de él, restemos un cuadrado de longitud igual al lado corto de aquél. En este proceso conseguiremos un nuevo rectángulo áureo, de tamaño obviamente menor. Si repetimos el proceso varias veces obtendremos la figura siguiente:



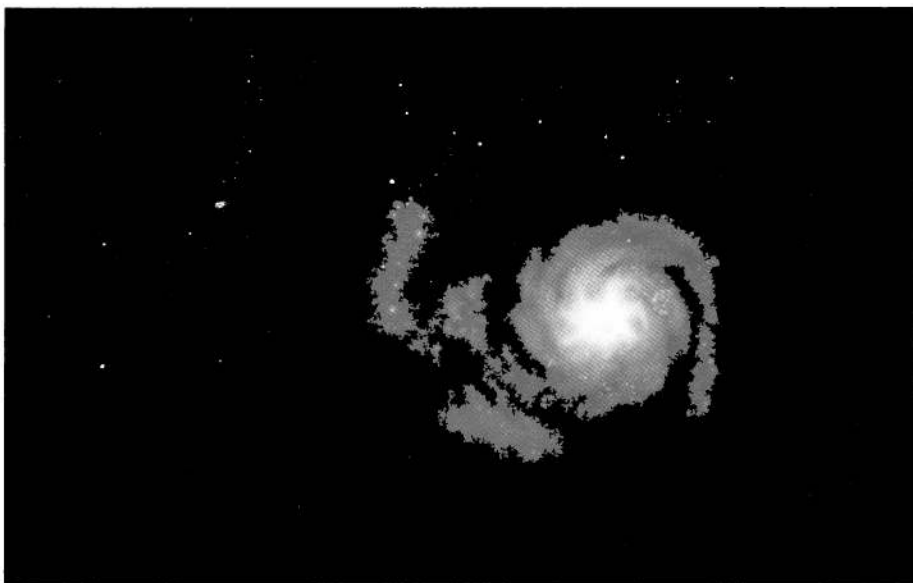
Vamos ahora a trazar distintos cuadrantes de circunferencia de un radio igual al lado de cada uno de los cuadrados que hemos ido quitando, y con el centro en el vértice de cada uno de ellos. El dibujo resultante nos quedará como sigue:



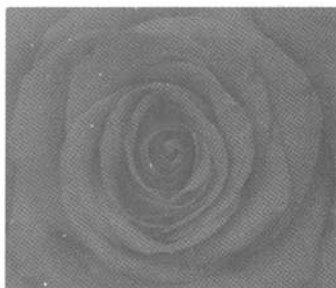
Esta curva sinuosa, de gran elegancia, se denomina *espiral logarítmica*. Lejos de ser una mera curiosidad matemática, se puede observar muy fácilmente en nuestro entorno, en un recorrido vertiginoso que va de la concha de los nautilus...



...a la forma de los brazos de las galaxias...



...y, de regreso a la naturaleza en tierra firme, a la elegancia sin par de la disposición de los pétalos de una rosa:



Acompañados de la reina de las flores, nos internamos en otro ámbito donde la proporción áurea es emperatriz suprema: el reino vegetal. Su presencia allí es sutil y requiere introducir un nuevo concepto matemático: la sucesión de Fibonacci. Dicha serie numérica, descrita por este matemático italiano del siglo XIII, arranca con los valores 1 y 1, a partir de los cuales cada nuevo término se genera con la suma de los dos anteriores. Los quince primeros números de esta serie infinita son los siguientes:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

El cociente entre un término cualquiera de la sucesión y su antecedente se aproxima a Φ a medida que avanzamos a lo largo de la serie. Comprobémoslo:

$$1/1 = 1$$

$$2/1 = 2$$

$$3/2 = 1,5$$

$$5/3 = 1,666...$$

$$8/5 = 1,6$$

$$13/8 = 1,625$$

$$21/13 = 1,615348...$$

$$34/21 = 1,61904$$

$$55/34 = 1,61764$$

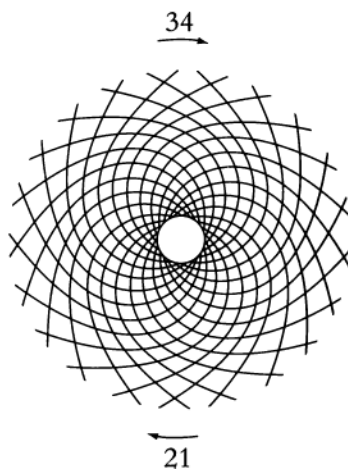
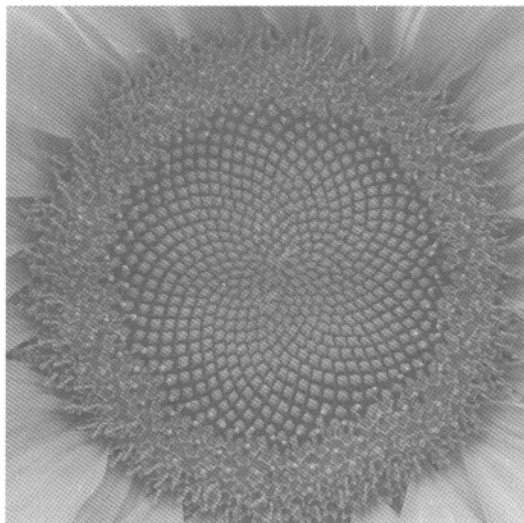
$$89/55 = 1,61818$$

$$144/89 = 1,61798$$

$$\Phi = 1,6180339887...$$

Cuando se alcanza el término cuadragésimo de la sucesión, el cociente se aproxima al número de oro con una precisión de 14 decimales. Las relaciones entre la sección áurea y la sucesión de Fibonacci son múltiples e insospechadas y se exploran con más detalle más adelante; baste apuntar en esta introducción las asombrosas correspondencias entre el reino abstracto de los números y la realidad palpable, el sueño pitagórico convertido en realidad en un escenario de excepción.

Para ello, nos serviremos de dos flores de apariencia dispar. En primer lugar, observemos la siguiente flor del girasol, cuajada de pepitas:



Al poco nos daremos cuenta de que las pepitas dibujan espirales concéntricas en sentidos horario y antihorario. Si se cuentan unas y otras, resultan dos números en apariencia anodinos: 21 y 34... Dos números que ya hemos visto antes.

Efectivamente, se trata de dos términos sucesivos de la serie de Fibonacci. Si hiciéramos el mismo ejercicio para el caso de otras flores de girasol, es muy probable que el resultado fuera el mismo o, en su lugar, otro par de términos sucesivos de la misma serie, en especial 55 y 89. La presencia de la proporción áurea en plantas y árboles no se agota con este ejemplo, sino que abarca la disposición de las ramas de algunos árboles, el número de los pétalos de muchas flores, e incluso la forma de las hojas. Buena parte del quinto capítulo está destinado a explorar esta mágica imbricación de número y forma, abstracción y realidad.

Irracionales y series numéricas; Fidias y Leonardo; rosas y girasoles. Un auténtico mundo áureo cuyo examen pormenorizado iniciamos en su origen: el número Φ .

Los números

¿Cómo sería el mundo si una noche nos acostáramos y durante nuestro sueño desaparecieran todos los números y, con ellos, el pensamiento numérico? Al día siguiente, nos despertaríamos en un mundo sin ordenadores, sin radio ni televisión, sin teléfonos móviles y también sin fijos, incluso sin nuestro microondas para calentar la leche del desayuno... ¡Y aún no habríamos salido de casa! La sociedad humana no puede existir sin números. Su presencia es avasalladora, no sólo en la nueva sociedad nacida de la revolución digital, sino desde siempre. Los números han regido la actividad humana desde sus orígenes y son su instrumento mental más fundamental e impresionante.

Todas las civilizaciones han desarrollado números para llevar a cabo actividades básicas. Cada cultura los ha representado a su propio estilo, pero desde el principio de los tiempos, los recursos matemáticos del hombre se han centrado en cuatro actividades: contar, ordenar, medir y codificar.

Las dos primeras funciones son las más evidentes y lógicas. Para contar hay que poner números a lo que tenemos, es decir numerar; después, cuando tenemos una serie de objetos numerados, nuestra acción más espontánea es ponerlos por orden. Será mucho más tarde cuando aparezcan las últimas dos funciones, que entrañan mayor complejidad. Medir requiere patrones—unidad de cada una de las magnitudes y comparar los resultados obtenidos para operar con ellos. Aún más reciente es la última gran función de los números, la codificación. Ha llegado al final de la carrera, pero en la sociedad moderna la codificación ha adquirido una importancia vital.

BRAHMAGUPTA (598-670)

El matemático y astrónomo hindú Brahmagupta publicó en el año 628 el *Brahmasphutasiddhanta*, primer libro conocido en que aparece el sistema decimal completo, prácticamente igual al que utilizamos en la actualidad. No obstante, la forma de expresión con que los números se han universalizado se debe a los árabes.

EL NÚMERO 0. QUIZÁS LA CIFRA MÁS IMPORTANTE

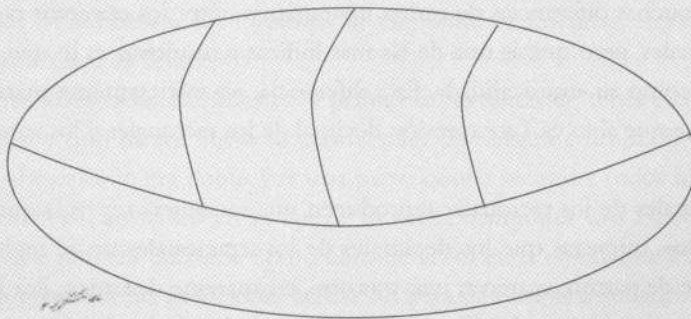
La piedra angular de nuestro sistema de numeración es el 0. Georges Ifrah, matemático e historiador de las cifras, explica que *«sin el cero y el principio de posición nunca se hubiera podido alcanzar la mecanización ni la automatización del cálculo»*.

Intentemos multiplicar algo tan simple como 138 por 570. Emprendamos la tarea en un sistema de numeración no posicional cualquiera; por ejemplo, el romano. Es decir, planteémonos multiplicar CXXXVIII por DLXX. Suponiendo que supiéramos siquiera por dónde empezar, lo que es seguro es que no sabríamos cómo terminar. Es una tarea inacabable, un auténtico tormento. Y eso que nos hemos limitado a números de tres cifras y a una operación sencilla como multiplicar.

Este caso viene a ilustrar que la propiedad clave de nuestro moderno sistema de numeración no es tanto la base empleada (10) sino el hecho de que cada cifra vale no sólo por su forma (1, 2...) sino por su posición relativa a las demás (12, 21). En nuestro sistema decimal posicional, pocas cifras bastan para nominar a un número, pues según se pongan a la derecha o a la izquierda de otras tienen un valor diferente.

Pero todavía más importante fue dar un nombre (y asignar una cifra) a la carencia de toda cantidad. Así, para indicar que no hay nada no decimos «no hay tales cantidades» sino «hay cero cantidades». Y en lugar de no escribir *nada*, se escribe un 0 (al principio se escribía un simple punto, «·» en lugar de un 0 explícito).

La atribución de un valor a la nada, equivale a la equiparación de la no-existencia-de-algo con la carencia-de-algo, y eso que puede parecernos una perogrullada es lo que, entre otras cosas, aceleró de modo irrefrenable el intercambio, el comercio y, a la larga, el progreso humano. Esa época milagrosa llamada Renacimiento, nació con algo tan sencillo como la introducción de un vulgar cero.



El primer uso documentado del cero autónomo es un jeroglífico maya del siglo I a.C. (en la ilustración). En el código empleado por esta civilización el 1 era un punto, el 5, una raya; el 14, cuatro puntos con dos rayas, etc.

Los primeros números que la humanidad utilizó fueron los llamados *naturales* (1, 2, 3, 4, 5...). En la base de la doctrina pitagórica, la más influyente en la matemática de la Grecia clásica y fundamental en las matemáticas de la actualidad, estaba la teoría de que los números naturales permitían la explicación del mundo y de toda la realidad que nos rodea. Los números naturales utilizados por medio de razones o cocientes entre ellos, es decir las fracciones, conforman lo que en matemáticas llamamos los números racionales. La expresión se entiende pensando que «racional» tiene la misma raíz que «ración», que a su vez la comparte con «razón» cuando se aplica a una proporción entre dos cantidades. Por tanto, «racional» viene del término «razón» en el sentido de relación, no en el sentido de algo «razonable».

Pitágoras y su escuela sabían hace más de veinticinco siglos que $\sqrt{2}$ no era racional, es decir que no se podía expresar como cociente de dos números naturales. Pero semejante idea contradecía los fundamentos de su pensamiento, que establecía el número indivisible y entero como base del universo. Los pitagóricos atribuían al número un carácter sagrado, y creían que mediante él todo podía medirse, que todo terminaba por ser número.

A los números que no son racionales se les llama «irracionales», un nombre poco cariñoso y probablemente poco acertado, que en realidad sólo significa que es un número no expresable como cociente de dos naturales. Imaginemos, pues, el desconcierto de los pitagóricos, enfrentados a magnitudes realmente *irracionales*, realmente imposibles de medir, como la simple diagonal de un cuadrado de lado unidad (o lo que es lo mismo, $\sqrt{2}$). No es de extrañar que intentaran esconder tan perturbador hallazgo.

Existen muchas diferencias de orden matemático entre los números racionales y los irracionales, pero quizás una de las más lúdicas e intuitivas es lo que podríamos definir como su «musicalidad». Esta diferencia, no estrictamente matemática, tiene una base que sí lo es. La expresión decimal de los racionales y los irracionales es distinta.

Los decimales de los racionales reproducen una secuencia repetida que llamamos «periodo», mientras que los decimales de los irracionales no se repiten con ninguna clase de patrón, aparecen uno tras otro, en aparente desorden. Por lo tanto, si asignamos un sonido a cada cifra y hacemos «sonar» los decimales de un racional, escucharíamos una melodía que se va repitiendo, como el estribillo de una canción. En el caso de los números irracionales las notas sonarían sin ton ni son, y no podríamos obtener jamás una melodía.

LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Eso quiere decir que $\sqrt{2}$ se puede expresar como una proporción

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con p y q enteros y primos entre sí (es decir, sin factores comunes). Operando y elevando al cuadrado,

$$2q^2 = p^2$$

con lo cual p ha de ser par. Pero si p es par, $p = 2r$ y

$$2q^2 = 4r^2$$

y simplificando

$$q^2 = 2r^2$$

entonces resulta que q también ha de ser par. O sea que ambos, p y q , han de ser pares, y por tanto comparten un factor común, que es 2. Se mire por donde se mire, el resultado es una contradicción. Por tanto, la suposición inicial, que $\sqrt{2}$ es racional, es falsa.

La definición del número áureo

El número de oro, o número áureo, es un número irracional que representamos con la letra griega *phi* (Φ). Fue un hallazgo de los griegos de la época clásica y su historia documentada comienza en uno de los libros más célebres, comentados y reimpresos de la historia: los *Elementos de Geometría* de Euclides, escrito alrededor de 300 años antes de Jesucristo.

La obra maestra de Euclides es el primer superventas de tema científico de la humanidad y uno de los libros fundamentales de nuestra cultura. El objetivo de Euclides al escribirlo era doble. Por una parte, quería recopilar todos los resultados de matemáticas conocidos en su época, es decir, componer una especie de enciclopedia que pudiera utilizarse como libro de texto en la enseñanza. Por otro lado, pretendía ~~presentar~~ un modelo de actuación para demostrar resultados y construir una teoría matemática, con axiomas y reglas de deducción.

El éxito de los *Elementos* en sus pretensiones es incontestable; su influencia ha sido decisiva en el desarrollo de la matemática universal a todos los niveles. El matemático y divulgador del siglo XX Lucio Lombardo Radice escribió: «Después

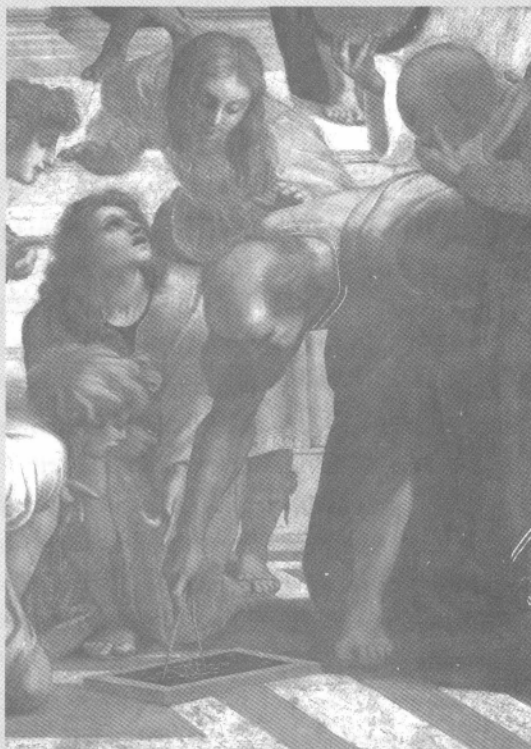
de la Biblia y las obras de Lenin, es el (libro) que ha tenido más ediciones y se ha traducido a más lenguas; ha sido, hasta hace algunos decenios, el libro de geometría para la enseñanza media». Puesto que las matemáticas son asignatura obligatoria en los sistemas educativos de todo el mundo, todos los seres humanos del planeta que han ido a la escuela han leído los *Elementos* escondido tras sus libros de texto.

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA (325-265 A.C.)

A pesar de su importancia en la historia de las matemáticas, se conocen tan pocas cosas con certeza de la biografía de Euclides que a menudo se le confunde con otro Euclides, el de Megara. Euclides de Alejandría nació hacia el año 325 a.C. y en el 300 a.C. aparece ya en Alejandría como director del departamento de matemáticas del llamado Museo (refugio de las musas) de la ciudad, el mayor centro científico de todo el Mediterráneo en su época, pues recogía copias de los principales manuscritos científicos del momento. Allí vivió y murió hacia el año 265 a.C. Se cree que se educó en Atenas y se le consideraba ya en vida uno de los

grandes talentos de la época.

Su influencia se extiende a través de los siglos de tal forma que cuando en la década de 1930 un grupo de matemáticos con el nombre colectivo de Bourbaki quiso dar un giro radical a las matemáticas de la época enarbolaron la consigna «¡Abajo Euclides!».



Detalle de La escuela de Atenas de Rafael. El artista pintó a Euclides con la cara del arquitecto Bramante y un compás en la mano.

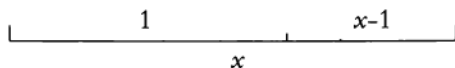
Elementos de Geometría se compone de trece libros. Del libro I al libro VI se dedica a la geometría elemental, del VII al X, a cuestiones numéricas, del XI al XIII a la geometría de los sólidos. En el libro VI, como tercera definición, aparece el texto que lo empezó todo. La traducción castellana del cosmógrafo de Felipe II, Rodrigo Zamorano, de 1576, la presenta de la siguiente manera: «Dize se ser dividida una línea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor».

3. Dize se ser dividida vna línea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor.

Traducido al castellano actual el texto reza: «Se dice que una recta está dividida en media y extrema razón cuando la longitud de la línea total es a la de la parte mayor, como la de esta parte mayor es a la de la menor». O dicho todavía con mayor concisión: «El todo es a la parte como la parte al resto».

Esta media y extrema razón, que aparece con tanta modestia, es el número que con posterioridad se llamará número de oro o número áureo y al que Luca Pacioli dedicará todo un tratado en 1509, dándole el nombre de *divina proporción*. Φ , el símbolo con el que hoy conocemos al número áureo, se le asignó en época muy posterior, a principios del siglo XX, cuando el matemático norteamericano Mark Barr propuso vincular el número con Fidias, constructor del Partenón de Atenas, y tomó prestada su inicial.

A continuación, y puesto que ya hemos presentado el número e incluso lo hemos ubicado en el grupo de los irracionales, haremos por fin una inmersión profunda en su naturaleza matemática. Vamos a calcular el número Φ .



Si tenemos un segmento y en él tomamos dos partes, la partición que hemos hecho lo será en media y extrema razón, o sea será una partición áurea cuando $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$.

Esta igualdad nos lleva (ya que para que dos fracciones sean iguales o equivalentes lo tienen que ser sus productos en cruz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$) a la ecuación de segundo grado:

$$x \cdot (x-1) = 1 \cdot 1 \rightarrow x^2 - x = 1$$

equivalente a $x^2 - x - 1 = 0.$ (1)

Que tiene dos soluciones, y la positiva, que es la que nos interesa, es

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

Ésta es la relación que buscamos y a la que llamamos Φ :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

Puesto que la solución de la ecuación (1) es la relación entre las longitudes de los segmentos, ésta será la misma cualquiera que sea el segmento del que partamos. Dicho de otra forma: la proporción áurea tendrá el mismo valor con independencia de la longitud del segmento inicial.

Puesto que en su expresión aparece una raíz cuadrada no exacta, el número Φ será un número irracional. Lo que quiere decir que nunca podremos tener una expresión decimal exacta. Y todavía más: que no habrá ningún grupo de sus decimales que se repita de modo periódico. El número Φ es, pues, un número decimal no periódico, del que se pueden conocer, eso sí, tantas cifras exactas como queramos a partir de las de la $\sqrt{5}$. De todas formas, no nos aportarán gran cosa, ya que la importancia de Φ es más geométrica que numérica. En todo caso, $\Phi = 1,618033988749894...$, con 15 decimales, tiene precisión más que suficiente para cualquier cálculo que queramos acometer.

A continuación, echemos mano de la calculadora más cercana y hagamos algunos cálculos sencillos tomando como aproximación los cinco primeros decimales de $\Phi = 1,61803$.

Primero dividimos: $1/\Phi$. ¿Qué nos sale? Los mismos decimales, pero sin el 1. Con mucha aproximación, resulta que $1/\Phi = \Phi - 1$.

LOS DECIMALES DE Φ

Para los amantes de la precisión, a continuación aparecen los mil primeros decimales del número áureo.

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526
046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693
179318006076672635443338908659593958290563832266131992829026788067520
876689250171169620703222104321626954862629631361443814975870122034080
588795445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433
944221254487706647809158846074998871240076521705751797883416625624940
758906970400028121042762177111777805315317141011704666599146697987317
613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347
845878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724
292675263116533924731671112115881863851331620384005222165791286675294
654906811317159934323597349498509040947621322298101726107059611645629
909816290555208524790352406020172799747175342777592778625619432082750
513121815628551222480939471234145170223735805772786160086883829523045
926478780178899219902707769038953219681986151437803149974110692608867
4296226757560523172777520353613936.

Hagamos el cuadrado, Φ^2 . También con mucha aproximación $\Phi^2 = \Phi + 1$.
¿Casualidad? Enseguida veremos que no.

Propiedades elementales del número áureo

Para comenzar, recordemos que Φ es la solución de la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

lo que indica que la igualdad se cumple para ese valor. Ya lo habíamos intuido con su valor aproximado

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1. \quad (2)$$

A partir de (2), multiplicando varias veces los dos miembros por Φ llegamos a:

$$\begin{aligned}\Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3\end{aligned}\tag{3}$$

Lo que significa que *cualquier potencia de Φ es igual a la suma de las dos potencias anteriores*. Luego, una vez que tengamos los valores de Φ y de Φ^2 , si queremos obtener el resto de las potencias de Φ , ya no tenemos que multiplicar más, basta con ir sumando dos consecutivas para obtener la siguiente.

Asimismo, utilizando las expresiones (2) y (3) podemos encontrar otras equivalencias para las potencias de Φ en las que sólo interviene el propio valor de Φ y números naturales.

$$\begin{aligned}\Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 = (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 = 8\Phi + 5 \\ \Phi^7 &= \Phi^6 + \Phi^5 = 13\Phi + 8 \\ \Phi^8 &= \Phi^7 + \Phi^6 = 21\Phi + 13\end{aligned}\tag{4}$$

Vemos que para obtener cualquier potencia de Φ basta con multiplicar el propio número áureo por un número que es la suma de los coeficientes de las potencias anteriores de Φ y sumarle un número que es el coeficiente de la potencia anterior. Por ejemplo, en Φ^6 , el 8 que multiplica a Φ es la suma de 5 y 3 que aparecen en la expresión de Φ^5 y el 5 es el número que multiplica a Φ en esa potencia.

Es conveniente recordar las propiedades que expresan (3) y (4) para cuando veamos más adelante la forma de obtener aproximaciones de Φ por medio de la sucesión de Fibonacci. La parte izquierda de las igualdades (3) nos dice que se puede obtener una progresión geométrica de razón Φ sumando dos de sus potencias consecutivas.

Calculamos ahora el valor de $1/\Phi$ para ver si era casual el resultado que obteníamos al operar con su expresión decimal aproximada. Para ello partimos de la expresión (2) que nos define Φ :

NÚMEROS TRASCENDENTES Y NÚMEROS ALGEBRAICOS

Se llaman números algebraicos a los números reales que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Ejemplos de números algebraicos son $\sqrt{2}$, la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ o el número áureo, Φ , que lo es de $x^2 - x - 1 = 0$.

Los números que no son solución de ninguna ecuación polinómica –es decir, que no son algebraicos– se llaman números *trascendentes*. Como hay infinitas ecuaciones polinómicas y muchas de ellas tienen solución, podríamos pensar que casi todos los números son algebraicos... Pero no es así: hay muchos más números trascendentes que algebraicos.

Probar que un número concreto es trascendente no es sencillo, porque, al haber infinitas ecuaciones, no se puede demostrar por comprobación. ¡No pueden comprobarse todas! Los dos números trascendentes más famosos son e y π . El primero lo probó el matemático francés Charles Hermite en el año 1873. Para probar que π lo era, aunque era conocido desde muchos siglos antes, hubo que esperar hasta que el alemán Ferdinand von Lindemann lo demostrara en 1882.

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^2 - \Phi = 1.$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por Φ :

$$(\Phi^2 - \Phi) / \Phi = 1 / \Phi$$

$$\Phi - 1 = 1 / \Phi.$$

Esta sorprendente propiedad nos anticipa un horizonte de posibilidades. Con este pequeño ejercicio vemos que Φ , pese a su modesta definición, es capaz de proporcionarnos maravillosos descubrimientos. Lo más asombroso será ver primero cómo se proyecta en los más diversos campos de las matemáticas, y después, cómo tiene repercusiones también fuera de su ciencia materna.

Imaginemos que intentamos hallar el valor de la sucesión indefinida de raíces cuadradas

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (5)$$

Podemos ir obteniendo valores al añadir sucesivas raíces y vamos obteniendo los sucesivos valores decimales aproximados de A .

$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = 1,4142$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = 1,5538$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} = 1,5931$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}} = 1,6119$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}} = 1,6161$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}} = 1,6174$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}} = 1,6178$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}} = 1,6180.$$

SUCESIONES

Entenderemos por sucesión un conjunto indefinido de números ordenados que siguen una cierta ley de formación. Se suelen representar poniendo una misma letra con subíndices que indican el lugar que ocupan: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots = \{a_n\}$.

Algunos ejemplos de sucesiones son la de los números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{2n\}$, o la de cuadrados $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} = \{n^2\}$. Otros ejemplos sencillos son las *progresiones geométricas*, en las que cada término es igual al anterior multiplicado por un número constante, que se llama «razón», o dicho de otra forma, que el cociente entre dos términos consecutivos es constante. Si de una sucesión tenemos una expresión que nos dé el valor de cada término en función del lugar que ocupa, el *término general*, ya tenemos definida completamente la sucesión, porque podemos conocer todos sus términos.

En el caso de una progresión geométrica cuyo primer término sea a_1 y su razón r , el término general tendrá como expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

También se puede definir una sucesión por medio de una ley que nos permita obtener un término conocidos los anteriores, lo que se llama una *ley de recurrencia*. Es más conveniente para trabajar con una sucesión tener el término general, pero no siempre es posible o sencillo tenerlo.

A partir de entonces, aunque añadamos más términos, nos moveremos siempre alrededor de 1,618, prácticamente el valor de Φ . Otra vez nos sorprende una posible nueva expresión para obtener aproximaciones de Φ . Vamos a comprobarlo.

Elevando (5) al cuadrado obtenemos

$$A^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = 1 + A.$$

Con lo que se cumple $A^2 - A - 1 = 0$

Que es la misma ecuación que define Φ . Por lo tanto, su solución es otra forma de expresar el número áureo:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

FRACCIONES CONTINUAS

Las fracciones continuas simples son expresiones del tipo

$$a + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

donde todos los a_i que aparecen son números enteros. Por facilidad de representación se suelen denotar como $[a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$, y si hay algún grupo de cifras que se repite, se marca con una línea superior (por ejemplo, si son a_1 y a_2 las que se repiten periódicamente se escribirá: $[\overline{a_1, a_2}]$).

Para los números racionales la fracción periódica equivalente es finita. Por ejemplo:

$$\frac{37}{11} = 3 + \frac{4}{11} = 3 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [3, 2, 1, 3].$$

Todo irracional que contenga una raíz cuadrada (cuadrático) se puede expresar también en forma de fracción continua. Y si es la solución de una ecuación del tipo $x^2 - bx - 1 = 0$ se puede expresar como una fracción continua de periodo b .

$$b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \dots}}} = [b, b, b, b, \dots] = [\overline{b}].$$

LOS NÚMEROS METÁLICOS

Hemos visto que el número áureo es la raíz positiva de una ecuación de segundo grado. Esta propiedad ha llevado a generalizar el concepto y definir la familia de los números metálicos. Además de Φ , el número de oro, existen los números de plata, de bronce, de cobre... con los que Φ también tiene similitudes en construcciones geométricas y como límite de sucesiones. Los números metálicos se definen de manera algebraica como las soluciones positivas de ecuaciones de segundo grado del tipo

$$x^2 - px - q = 0 \quad (M)$$

donde p y q son números naturales que dan lugar a los diferentes componentes de la familia. Si en (M) hacemos $p=2$ y $q=1$ la solución positiva es $1+\sqrt{2} \approx 2,414213562373095048...$. Este resultado es conocido como el número de plata.

Si en (M), $p=3$ y $q=1$, la solución positiva $\frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,30277563773199464...$ nos da el número de bronce.

Sus nombres metálicos se comprenden mejor si expresamos estos números en forma de fracción continua. Ya sabemos que $\Phi = [1]$. Pues bien, resulta que el número de plata $= [2]$, y el número de bronce $= [3]$.

Una forma habitual a lo largo de la historia de aproximar valores es por medio de fracciones continuas. Tenemos para Φ la expresión

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = [1, 1, 1, 1, \dots] = [\overline{1}] \quad (6)$$

de la que se puede ver que es cierta porque podemos escribir (6) en la forma

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \right)} = 1 + \frac{1}{\Phi} \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Por tanto, hemos encontrado dos nuevas expresiones para Φ , las (5) y (6). En la actualidad, la facilidad de cálculo de los ordenadores ha restado importancia a estas maneras de aproximar Φ , pero en la larga historia del número se han encontrado siempre entre las más clásicas. Aún hoy suponen un excelente ejercicio mental para el que sólo es necesaria una calculadora de bolsillo.

La sucesión de Fibonacci

La historia de las matemáticas es a veces sorprendente, y desde luego, siempre inesperada. El viejo número áureo, tan geométrico, emparentó siglos después con unas fracciones que surgieron de una sucesión puramente aritmética. El artífice del matrimonio fue el más destacado matemático de la Edad Media, Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci.

Fibonacci escribió obras de geometría, álgebra y teoría de números, de la que fue un pionero, pero la más conocida trata sobre el cálculo. *El Liber abaci* (Libro del ábaco), publicado en 1202, tiene un título engañoso, una especie de ironía, porque

LEONARDO PISANO, FIBONACCI (1170-1250)

Leonardo Pisano nació en Pisa en 1170. Su apodo denota su origen familiar, pues Fibonacci significa simplemente «hijo de Bonacci» (*figlio di Bonacci*). Sin embargo, el nombre es de origen moderno, no hay pruebas de que fuera conocido como Fibonacci en su época.

Se inició en las matemáticas desde la contabilidad, pues su padre era un mercader italiano con relaciones comerciales internacionales. Pronto Leonardo mostró un interés por las matemáticas

que iba mucho más allá de sus aplicaciones mercantiles. Los viajes comerciales al norte de África le proporcionaron la oportunidad de aprender de maestros musulmanes que le transmitieron la matemática árabe. Así conoció el sistema de numeración indo-arábigo y comprendió de inmediato sus enormes ventajas. Se convirtió en su más acérrimo valedor en Europa, donde intentó divulgarlo. A él le debemos su introducción en nuestra cultura.



justamente en él se trata de demostrar las ventajas de las cifras árabes para el cálculo frente a los métodos habituales en la Italia de la época, donde los abacistas empleaban el ábaco y los viejos números romanos. El libro de Fibonacci terminó con ellos, pero no fue fácil. A pesar de la facilidad para el cálculo que suponía la numeración decimal, no se extendió con rapidez, sino al contrario. Tuvo que enfrentarse a todo tipo de resistencias, sobre todo del gremio de calculistas, que durante siglos estuvo dominado por los abacistas en detrimento de los partidarios del cálculo con números arábigos, los algoristas.



Ilustración del libro de Gregor Reisch, Margarita Philosophica, en la que se muestra una disputa entre abacistas (derecha) y algoristas (izquierda). La imagen es de 1504 y muestra como tres siglos después de Fibonacci todavía no estaba resuelta la disputa sobre el cálculo.

Además del uso de las cifras y de los métodos de cálculo, el *Liber abaci* aborda la teoría de números (descomposición en factores primos, criterios de divisibilidad...), contiene problemas de álgebra de primer grado y por supuesto habla de contabilidad mercantil, de la regla que en los venerables libros de aritmética mercantil se llamaba reparto de beneficios y pérdidas y del cambio de monedas. Pero el más conocido de los problemas propuestos en el *Libro del ábaco* es el famoso problema de los conejos, cuya solución es la sucesión que hoy se conoce con el nombre de Fibonacci.

El problema está enunciado de la siguiente forma: *¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año si comenzamos con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su vez a los dos meses de vida?*

Para resolverlo, Fibonacci, como buen mercader y financiero, hizo una tabla. En ella desglosaba el crecimiento de su familia de conejos y hacía un seguimiento del número de parejas que tenía al acabar cada mes. La columna final muestra el número total de conejos. Un vistazo rápido nos permite advertir un curioso comportamiento en la sucesión: cada término se obtiene como suma de los dos que le preceden.

Mes	Generación						Total
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	
1º	1						1
2º	1						1
3º	1	1					2
4º	1	2					3
5º	1	3	1				5
6º	1	4	3				8
7º	1	5	6	1			13
8º	1	6	10	4			21
9º	1	7	15	10	1		34
10º	1	8	21	20	5		55
11º	1	9	28	35	15	1	89
12º	1	10	36	56	35	6	144

Los números de la última columna componen la llamada sucesión de Fibonacci, definida por recurrencia por la ley

$$a_1 = 1, a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 2).$$

Veamos una primera relación de esta sucesión con el número áureo. Retomaremos para ello la expresión (4) del apartado anterior, que nos daba las potencias de Φ , y que aquí mostramos de forma concisa:

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$

$$\Phi^8 = 21\Phi + 13$$

Si nos fijamos en los coeficientes de las sucesivas potencias de Φ vemos que son dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. De forma que, siendo a_n el término de lugar n de la sucesión de Fibonacci, podemos poner como expresión general de esas potencias del número áureo

$$\Phi^n = a_n \Phi + a_{n-1}.$$

Continuamos con otras relaciones. Recuperemos nuestra compañera de juegos, la calculadora, y hagamos el cociente entre cada uno de los términos de la

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Decimos que el número A es el límite de una sucesión $\{a_n\}$ cuando los términos de la sucesión pueden llegar a hacerse tan próximos a A como deseemos, a partir de uno concreto, que depende de la proximidad que queramos.

Pueden servir de ejemplo la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ de límite 0

(porque las fracciones $1/n$ pueden ser tan cercanas a 0 como queramos al crecer n),

o la $\left\{\frac{2n+1}{2}\right\}$ cuyo límite es 2. No todas las sucesiones tienen límite.

sucesión de Fibonacci y el anterior: a_n / a_{n-1} . Al principio, los resultados tienen poco que ver con Φ , pero continuemos. ¿Qué descubrimos? Pues sí, efectivamente, de pronto la diferencia comienza a reducirse hasta un nivel sorprendente. En la siguiente tabla podemos comprobar que a partir del décimo término es menor de 1 milésima.

Lugar	Término	a_n / a_{n-1}	Diferencia con Φ
1	1		
2	1	1.0000000000000000	-0.618033988749895
3	2	2.0000000000000000	+0.381966011250105
4	3	1.5000000000000000	-0.118033988749895
5	5	1.6666666666666667	+0.048632677916772
6	8	1.6000000000000000	-0.018033988749895
7	13	1.6250000000000000	+0.006966011250105
8	21	1.615384615384615	-0.002649373365279
9	34	1.619047619047619	+0.001013630297724
10	55	1.617647058823529	-0.000386929926365
11	89	1.618181818181818	+0.000147829431923
12	144	1.617977528089888	-0.000056460660007
13	233	1.6180555555555556	+0.000021566805661
14	377	1.618025751072961	-0.000008237676933
15	610	1.618037135278515	+0.000003146528620
16	987	1.618032786885246	-0.000001201864649
17	1,597	1.618034447821682	+0.000000459071787
18	2,584	1.618033813400125	-0.000000175349770
19	4,181	1.618034055727554	+0.000000066977659
20	6,765	1.618033963166707	-0.000000025583188

Esto demuestra que para tener aproximaciones de Φ no hace falta sacar decimales en ninguna raíz, sino que basta con dividir términos de la sucesión de Fibonacci.

Como en el caso del número áureo, lo que van indicando todas estas comprobaciones es cierto a nivel general: el límite de los cocientes de los términos de la sucesión de Fibonacci es Φ . Vamos a verlo.

Supongamos que la sucesión de cocientes de los términos de la sucesión de Fibonacci a_{n+1}/a_n tiene límite (lo suponemos porque no lo vamos a demostrar) y le llamamos L . Se tendrá entonces

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = 1 + \lim \frac{a_{n-1}}{a_n} =$$

$$1 + \lim \frac{\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{L}.$$

(Recordemos que $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$)

Luego:

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

$$L^2 = L + 1$$

$$L^2 - L - 1 = 0$$

$$L = \Phi.$$

Es decir, que L cumple la misma ecuación que Φ , luego tienen el mismo valor. Así, el límite de la sucesión de los cocientes de Fibonacci es el número áureo.

La sucesión de Fibonacci original es la que empieza con 1 y 1. Si en vez de esos dos términos, comenzáramos con otros dos cualesquiera, y progresáramos en la sucesión (haciendo que cada término sea la suma de los dos anteriores), el límite del cociente de cada término entre el anterior también sería Φ . Si nos fijamos, en el razonamiento que acabamos de hacer lo único que se utiliza de la definición de la sucesión es que

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Relaciones numéricas sorprendentes

Como vemos, la sucesión de Fibonacci permite aproximar el número Φ tanto como queramos por medio de sus cocientes, pero tiene muchos más usos que la mera resolución de un problema de conejos, y también presenta relaciones muy peculiares con otros protagonistas estelares de la matemática. Veamos algunas de ellas.

Suma de los términos de la sucesión de Fibonacci

Si elegimos diez términos consecutivos cualesquiera de la sucesión y los sumamos, obtenemos siempre un múltiplo de 11. Es el caso de los diez primeros, cuya suma es:

$$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143=11\cdot 13.$$

O lo mismo pasa con

$$21+34+55+89+144+233+377+610+987+1597=4.147=11\cdot 377.$$

Pero no sólo eso, sino que, además, esa suma (como se ve en ambos casos) es exactamente 11 veces el término que ocupa el séptimo lugar de los sumandos (13 en el primer caso y 377 en el segundo).

Más sorpresas todavía. La suma de un número n cualquiera de términos de la sucesión desde el primero es igual al término que ocupa la posición $n+2$ tras restarle una unidad. Lo vemos en el caso de los diez primeros, que suman 143, que es igual al término situado en lugar 12 (144) menos 1. O en el caso de los 17 primeros, cuya suma es 4180 (igual al término a_{19} , que es 4181, menos 1).

Expresado en fórmula, lo que estamos diciendo es

$$1+1+2+3+5+\dots a_n = a_{n+2} - 1.$$

Si somos capaces de explotar esta propiedad hábilmente, podremos calcular la suma de un número cualquiera de términos consecutivos, en lo que parecerá al observador un auténtico truco de magia. Elijamos, para poner un ejemplo, dos términos cualesquiera como el 24 y el 40, y utilicemos la fórmula que acabamos de escribir:

$$1+1+2+3+5+\dots a_{40} = a_{42} - 1$$

$$1+1+2+3+5+\dots a_{25} = a_{27} - 1.$$

Si ahora restamos ambas expresiones

$$a_{25} + \dots + a_{40} = a_{42} - a_{27}$$

ya tenemos el truco a punto: para sumar todos los términos consecutivos entre otros dos, basta con hacer una simple resta de términos muy cercanos.

MARIO MERZ (1925-2005)

El artista italiano Mario Merz, uno de los más destacados representantes del arte povera, utilizó de forma recurrente la sucesión de Fibonacci en muchas de sus obras desde la década de los 70, con elementos diferentes (neones, mesas, animales, periódicos,...) y en formatos variados.

Así como los números de Fibonacci apuntan al infinito y describen un crecimiento progresivo a partir de la suma de las cifras anteriores, Merz utiliza la famosa sucesión para simbolizar el progreso social y del arte. Los cambios se fundamentan en la suma de eventos del pasado que son parte integrante y vital de todo desarrollo futuro. De la misma forma, el arte contemporáneo es la suma del arte precedente; no se puede crear de la nada. «Nos alzamos sobre hombros de gigantes», tal como escribió Newton.



Proyecto de Mario Merz para el metro de Nápoles que reproduce en espiral la sucesión de Fibonacci.

Las ternas pitagóricas

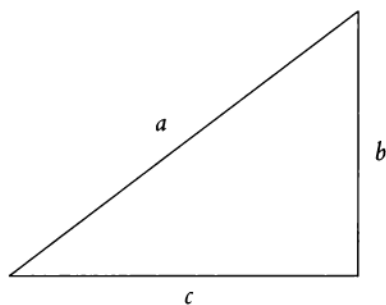
A pesar de que hay infinitas ternas pitagóricas, no es demasiado fácil encontrarlas. De ahí la utilidad de la sucesión de Fibonacci, que proporciona un método automático para hacerlo. Lo presentamos en este apartado, pero antes, vamos a intentar comprender mejor la relación entre Fibonacci, Pitágoras y el número áureo.

El resultado matemático más famoso de la humanidad es el teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud del lado mayor (la hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos (los catetos).

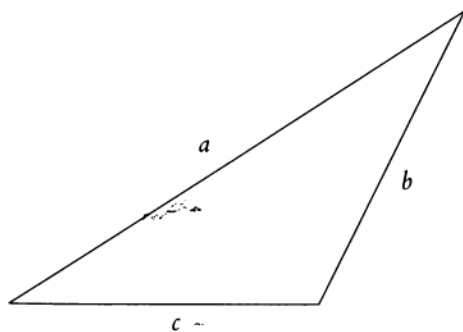
$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (T)$$

Desde el punto de vista geométrico, como el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, el teorema de Pitágoras afirma que si hacemos cuadrados cuyos lados sean los de un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene un área igual a la suma de las áreas de los otros dos.

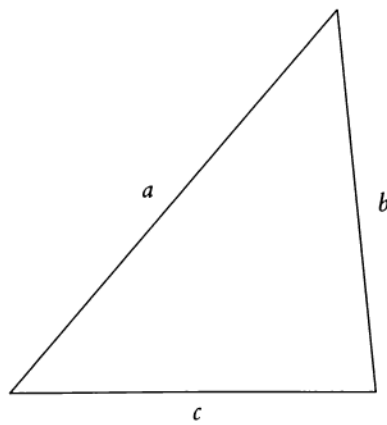
Esta misma expresión permite saber cómo es un triángulo según sus ángulos, sin medirlos. Basta con efectuar los cuadrados de las longitudes de los tres lados y comparar el cuadrado del lado mayor con la suma de las longitudes de los otros dos. Si esa suma es igual, estamos ante un triángulo rectángulo. Si es mayor, es un triángulo obtusángulo (el ángulo mayor es obtuso, sobrepasa los 90°). Si la suma es menor, el triángulo es acutángulo (los tres ángulos son menores de 90°).



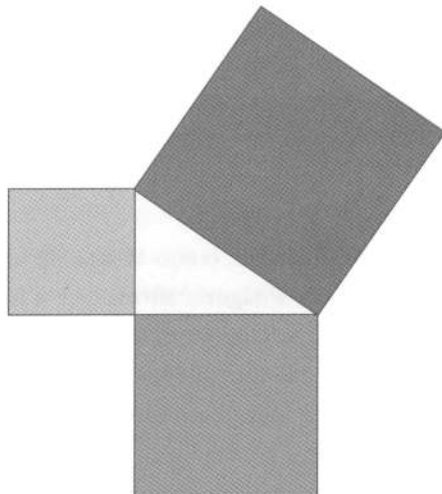
$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$a^2 > b^2 + c^2$$



$$a^2 < b^2 + c^2$$



Si hacemos cajas cuyos lados sean los cuadrados de la figura, la cantidad de líquido que entra en la grande sirve para llenar exactamente las dos más pequeñas.

Cuando los valores de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros, forman un conjunto de tres números que se ha denominado terna pitagórica. Es decir, que una terna pitagórica es un conjunto de tres números enteros (a, b, c) que satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A continuación, mostramos el método para encontrar ternas pitagóricas a través de la sucesión de Fibonacci. Elegimos cuatro términos consecutivos cualesquiera de la sucesión, como por ejemplo, 2, 3, 5 y 8. Con ellos formamos tres números:

1. El producto de los dos de los extremos $2 \cdot 8 = 16$;
2. El doble del producto de los dos centrales $2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$;
3. La suma de los cuadrados de los dos centrales: $3^2 + 5^2 = 34$.

Podemos comprobar fácilmente que estos tres números (34, 30, 16) forman una terna pitagórica:

$$16^2 = 256 \quad 30^2 = 900 \quad 34^2 = 1.156 \Rightarrow 256 + 900 = 1.156.$$

Lo que obtendremos siempre, en todos los casos, calculando con cualesquiera cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci que probemos.

EL PODER DIVINO DE LAS TERNAS

La terna de lados más pequeños y más conocida es (5, 4, 3). A lo largo de la historia se ha utilizado en forma de cuerdas con nudos a la misma distancia entre ellos para trazar ángulos rectos, sobre todo para después construir muros o paredes perpendiculares entre sí.

En algunas imágenes que nos han llegado del Egipto faraónico pueden verse portadores de un rollo de cuerda anudada. ¿Para qué la usaban? Si se tensa en el suelo la cuerda formando un triángulo, y se usan los nudos para delimitar los lados, resulta una figura de lados 3, 4 y 5. Dado que entre esos números se verifica la relación:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

3, 4 y 5 forman una terna pitagórica y el triángulo del suelo resulta ser rectángulo, con catetos 3 y 4 e hipotenusa 5.

La cuerda anudada se usaba para construir rápidamente triángulos rectángulos, es decir triángulos en forma de escuadra, con un ángulo recto, por tanto. En Egipto se utilizaban las cuerdas anudadas para trazar perpendiculares. Así se escuadraban los campos invadidos periódicamente por el Nilo, se cortaban las piedras de los monumentos, se alzaban las paredes y, en una palabra, se aplicaban las matemáticas elementales a la vida cotidiana.

Relación entre los términos de la sucesión de Fibonacci

Si escogemos tres términos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci, multiplicamos los dos de los extremos y los comparamos con el cuadrado del término central veremos que la diferencia es de una unidad (más o menos, según los términos que elijamos). Por ejemplo, si son 3, 5 y 8, en ese caso $3 \cdot 8 = 5^2 - 1$; en cambio, si son 5, 8 y 13 entonces $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$.

En general, la relación que se da entre los términos de la sucesión de Fibonacci es

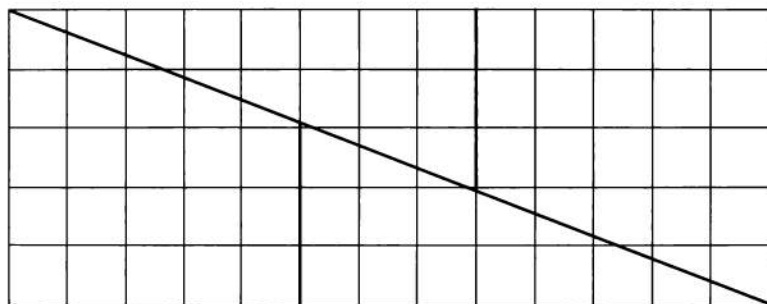
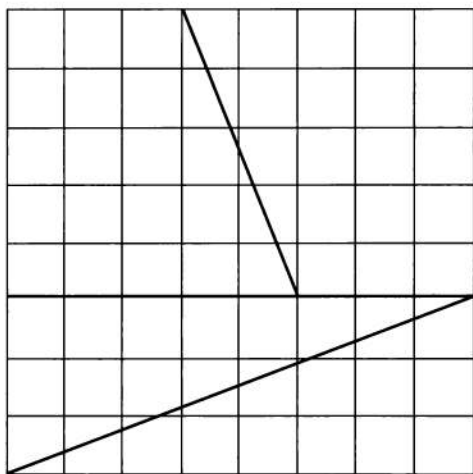
$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Si aplicamos geoméricamente esta propiedad, encontramos algo muy desconcertante. Dibujamos un cuadrado de lado 8 y marcamos en él pequeños cuadrados de lado unidad: tendrá $8^2 = 64$ cuadritos. A continuación, parcelamos su interior en cuatro trozos en la forma que indican las líneas del dibujo adjunto. Con los

EL TEOREMA DE FERMAT Y LAS TERNAS

Otro teorema, esta vez el de Fermat, es uno de los resultados matemáticos más populares de la historia de esta ciencia. Durante más de trescientos cincuenta años, el teorema de Fermat fue uno de los más desesperantes enigmas matemáticos, hasta que el británico Andrew Wiles lo probó en 1995. Fermat tiene una relación directa con Pitágoras y con las ternas. El teorema de Fermat establece que, si en la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ de las ternas pitagóricas sustituimos el exponente 2 por cualquier otro exponente entero, la ecuación resultante no tiene soluciones enteras, es decir, no existe ninguna terna entera que satisfaga $a^n = b^n + c^n$ para $n > 2$.

fragmentos, jugamos como si hiciéramos un puzzle en el que debemos construir un rectángulo de lados 5 y 13, que contendrá $13 \cdot 5 = 65$ cuadraditos. ¿De dónde ha salido el nuevo cuadradito?



BLAISE PASCAL (1623-1662)

El francés Blaise Pascal tuvo una inteligencia privilegiada que se desarrolló en muchos ámbitos.

En 1654 tuvo un grave accidente del que salió ileso físicamente pero con secuelas psíquicas.

Sufrió una crisis mística que le llevó a retirarse de la vida civil para refugiarse en la religión.

Pascal cultivó la filosofía y la teología, fue un escritor notable e hizo aportaciones muy importantes a la física ocupándose de conceptos mal comprendidos en su tiempo, como la presión atmosférica y el vacío. Es el inventor de la prensa hidráulica y

de la jeringuilla. También construyó uno de los primeros autómatas aritméticos de la historia (su célebre máquina, denominada *pascalina*, sumaba y restaba sin problemas), aunque sus aportaciones más recordadas son las de tipo matemático, en particular las relacionadas con el cálculo de probabilidades.

Pascal notó que los coeficientes de los monomios en las sucesivas potencias del binomio $(a + b)$ eran justamente las líneas del triángulo numérico que en lo sucesivo ha llevado su nombre. Así, por ejemplo, en el caso de la cuarta potencia

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Los coeficientes del primer al último término son: 1, 4, 6, 4, 1, lo que se corresponde con la quinta línea de su triángulo.



Para comprender este fenómeno, hay que calcular con precisión los ángulos de las rectas que parcelan la primera figura. Veremos que no son exactamente iguales. Al componer la nueva figura no forman un rectángulo perfecto, sino que dejan diminutos espacios entre las piezas. Estos espacios suman la superficie del cuadradito que parece venir de la nada.



El término general de la sucesión de Fibonacci

Definido por recurrencia, el término general de la sucesión lo encontró en 1843 el matemático francés Jacques Binet. Su expresión es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^{n+1} \Phi^n + \frac{1}{\Phi^n} \right].$$

Mediante esta fórmula se puede demostrar que la sucesión de los cocientes entre un término y el anterior de la sucesión de Fibonacci tiene por límite el número de oro.

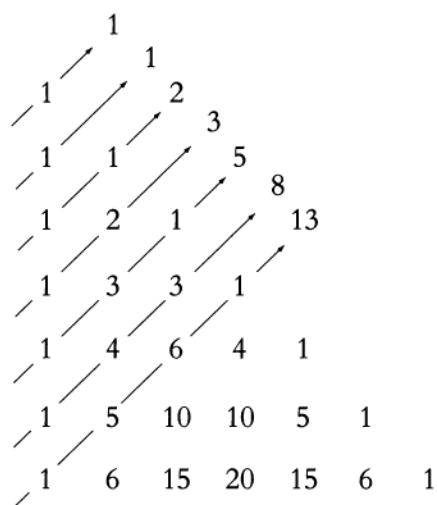
El triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci

Aunque el triángulo de Pascal es conocido con otros nombres fuera de Europa, es sin duda una de las disposiciones numéricas más célebres. El matemático francés la utilizó para avanzar en el descubrimiento de la fórmula general de la potencia del binomio, pero esa disposición triangular de los números ya era conocida por los científicos chinos y también por el matemático persa del siglo XII Omar Khayyám.

El triángulo de Pascal se compone de la siguiente manera: la primera fila es 1, después, cada fila tiene un número más que la anterior y cada uno de sus elementos es igual a la suma de los dos términos que tiene encima, en la fila superior. Su propia definición indica su relación con la sucesión de Fibonacci, que se define de manera parecida.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Con estos antecedentes, no podemos esperar otra cosa que una relación numérica directa entre ambos. Basta con sumar en diagonal los elementos del triángulo de Pascal, para conseguir la sucesión de Fibonacci. El esquema siguiente permite comprobarlo con facilidad:



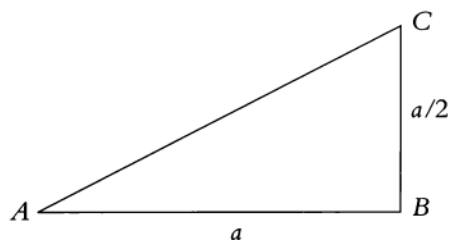
El rectángulo áureo

En el capítulo anterior hemos visto de qué manera ha sido presentada tradicionalmente la proporción áurea: una recta está dividida en media y extrema razón cuando la longitud de la línea total es a la de la parte mayor, como la de esta parte mayor es a la de la menor, es decir, que el todo es a la parte como la parte al resto. Veamos ahora cómo se puede dividir un segmento en media y extrema razón de forma gráfica.

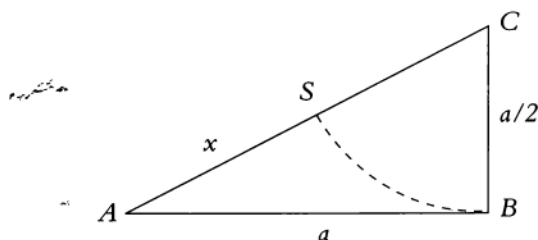
División de un segmento en media y extrema razón

Tenemos un segmento AB de longitud a y queremos hallar un punto X que lo divida en dos partes cuya proporción sea Φ . Explicaremos el procedimiento en tres etapas:

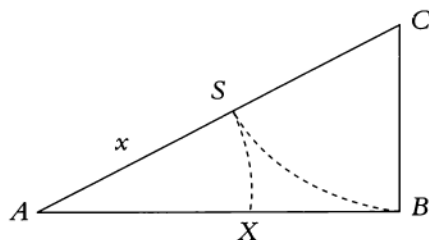
- a) Construimos un triángulo rectángulo de catetos a y $a/2$.



- b) Con centro en C y radio CB (por tanto, igual a $a/2$), trazamos un arco de circunferencia que cortará AC en S .



- c) Con centro en A y radio AS , trazamos otro arco que corta AB en el punto X . Ese punto cumple que $AX = x = AC - (a/2)$. Por lo tanto, es el punto que buscamos. Podemos comprobar que cumple que $AX / XB = \Phi$.



Este procedimiento es conocido como la Teoría de la Construcción. ¿Por qué nos permite construir la sección áurea? El punto X será el buscado si cumple

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AX} &= \frac{AX}{XB} \\ \frac{a}{x} &= \frac{x}{a-x} \\ x \cdot x &= a \cdot (a-x) \\ x^2 &= a^2 - ax \\ x^2 + ax &= a^2 \\ x^2 + ax + \frac{a^2}{4} &= a^2 + \frac{a^2}{4}. \quad (1)\end{aligned}$$

Pero a su vez, recordando la expresión del cuadrado de un binomio $(s+t)^2 = s^2 + 2st + t^2$, la expresión (1) puede adoptar la forma

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Según el Teorema de Pitágoras, se puede interpretar en esta expresión (2) que la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de longitudes a y $a/2$ medirá $(x + a/2)$.

Eso es exactamente lo que pasa con la hipotenusa AC , que mide $(x + a/2)$. Si le quitamos la distancia $CS = CB = a/2$, tendremos una longitud $AS = x = AX$.

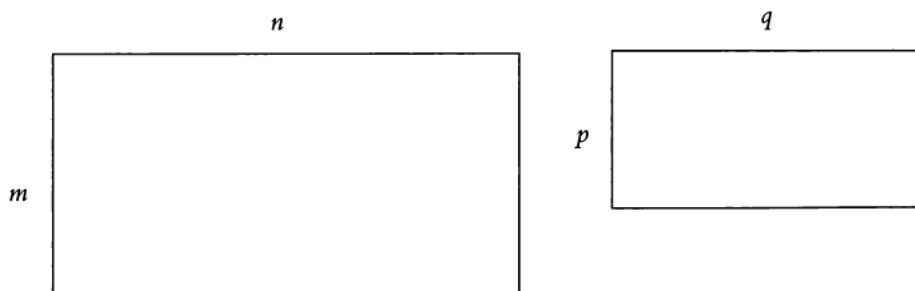
La forma de los rectángulos y el número áureo

En las carteras y los bolsos de los ciudadanos modernos se acumulan documentos identificativos y tarjetas de todo tipo: tarjetas de crédito o de visita; carnés de bibliotecas, piscinas, gimnasios o videoclubs; en algunos países, carnés de identidad o de pertenencia a algún servicio público de salud... Los extraemos y volvemos a guardarlos a diario sin prestar atención a un hecho que no es circunstancial ni carece de importancia: la mayoría de ellos tienen el mismo tamaño y forma, o, como mínimo, la misma proporción.

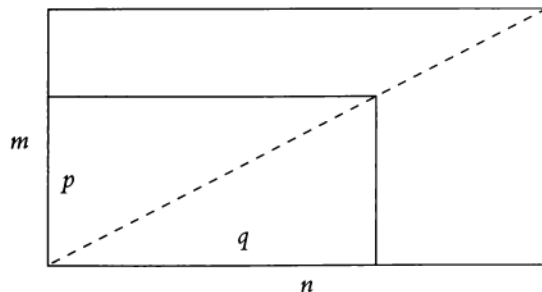
Averiguar qué razón subyace a todo ello es tan fácil como medir y comparar sus lados: el cociente entre las longitudes de los lados mayor y menor es, en la gran mayoría de los casos, un número muy próximo a 1,618, el número Φ . No es ninguna casualidad que el cociente de la mayoría de las tarjetas examinadas sea el mismo: se trata de una medida convencional.

Tomamos ese cociente entre las longitudes de sus dos lados distintos para definir la forma de los rectángulos. Si coincide, diremos que tienen la misma forma. En términos matemáticos, diremos que los rectángulos con esa propiedad son rectángulos semejantes. Por tanto, dos rectángulos que tienen los lados de longitudes m , n y p , q (con $m < n$ y $p < q$), serán semejantes cuando

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}. \quad (3)$$



Existe un ~~truco~~ ^{truco} efectivo y muy sencillo para reconocer si dos rectángulos cumplen la propiedad sin medir ni hacer cocientes, sin necesidad de lápiz ni papel alguno. Basta con colocarlos con un vértice coincidente y trazar la diagonal que parte del mismo: si coincide en ambos es que son semejantes.



El cociente m/n caracteriza a un rectángulo. Así, hablaremos de rectángulo módulo k cuando el cociente m/n valga k . Cuanto menor es el cociente m/n , más alargado es el rectángulo. El caso extremo lo encontramos cuando m/n es la unidad. Entonces conseguimos una figura particular que nos resulta muy familiar: un cuadrado. El cuadrado es un caso particular de rectángulo, el de módulo 1. Como vemos, no todos los rectángulos son tan parecidos como pensábamos.

Encontramos pruebas patentes de las diferencias entre rectángulos —de todo tipo, no necesariamente áureos— cuando observamos la evolución de las pantallas de los televisores o del cine. El tamaño clásico de los televisores era la proporción 4:3. Un proceso exitoso de cambio de formato ha implantado un nuevo estándar, el de los televisores planos y digitales, de proporción 16:9. En ambos casos, se trata de la relación entre las longitudes de sus lados. Si vemos una película o un programa en ambas pantallas a la vez advertiremos el enorme efecto de la proporción del cuadro en la imagen que contiene. En los televisores antiguos, por ejemplo, las figuras humanas son mucho más estilizadas, más alargadas en sentido vertical, mientras que en las pantallas planas las figuras humanas parecen achaparradas. ¿A qué se debe la diferencia y cuál de las dos imágenes está siendo distorsionada? Un simple cálculo nos muestra que no son rectángulos de la misma forma. Desde un punto de vista matemático, está claro que $9/16 \neq 3/4$. Calculemos: en realidad $3/4 = 0,75$, mientras que $9/16 = 0,5625$. El rectángulo visual de la televisión clásica es de módulo mayor. Los televisores panorámicos distorsionan en horizontal la señal televisiva tradicional porque la pantalla es más alargada.

El efecto contrario tiene lugar cuando una película rodada para la gran pantalla, en formato panorámico, se visiona en una pantalla 4:3, más cuadrada. Normalmente se recorta la imagen por los laterales para llenar toda la pantalla, con lo que no sólo se pierde imagen, sino una parte importante de la magia.

EL RECTÁNGULO EN UN OBJETO COTIDIANO: LAS MEDIDAS DE UN TELEVISOR

Como sabemos, los tamaños de los televisores se dan en pulgadas y según la longitud de la diagonal de la pantalla. La *pulgada* es una unidad del sistema anglosajón de medidas, equivalente a 2,54 cm. Su nombre viene del dedo pulgar y es una aproximación a la medida de la primera falange de ese dedo.

En la mayoría de países de Europa el sistema de medidas más habitual es el Sistema Métrico Decimal, por lo que a muchos europeos les resulta difícil a veces saber qué medidas exactas tiene el nuevo televisor que van a comprar. Conociendo las pulgadas de la pantalla y la relación entre sus lados, podemos calcular su tamaño exacto en términos más comprensibles, que nos eviten sorpresas desagradables, como descubrir que no encaja donde queríamos instalarla.

La pantalla de un televisor de 32", en formato 16:9, tiene una diagonal de $32 \times 2,54 = 81,28$ cm.

Por tanto, sus dimensiones reales son $9a$ y $16a$. En este punto, aunque parezca mentira, uno de los teoremas más antiguos de la historia va a ayudarnos a resolver el problema más reciente.

Para calcular el valor de a utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$(9a)^2 + (16a)^2 = 81,28^2$$

$$81a^2 + 256a^2 = 337a^2 = 6.606,44$$

$$a^2 = 6.606,44 / 337 \approx 19,6$$

$$a = \sqrt{19,6} \approx 4,43 \text{ cm.}$$

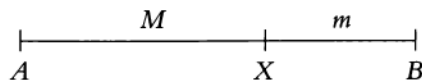
Así, las dimensiones de la pantalla serán $9 \times 4,43 \approx 40$ cm y $16 \times 4,43 \approx 71$ cm. Es decir, 40×71 cm.

El mismo cálculo nos permite saber que una televisión de 32", en formato antiguo 4:3, daría una pantalla de 49×65 cm. Lo cual nos lleva a una conclusión que excede al ámbito matemático: ¡no podemos sustituir alegremente nuestra televisión por el modelo nuevo! Aunque la pantalla tenga las mismas pulgadas, puede ser que el nuevo televisor no quepa donde estaba el otro.

Reconocer y construir un rectángulo áureo

Como ya ~~hemos~~ explicado, un rectángulo es áureo cuando la relación entre sus lados es Φ , o sea, cuando su módulo es Φ . A partir de ahora llamaremos a los rectángulos áureos por sus iniciales: R.A. Vamos a ver la manera de construirlos y de reconocerlos con facilidad.

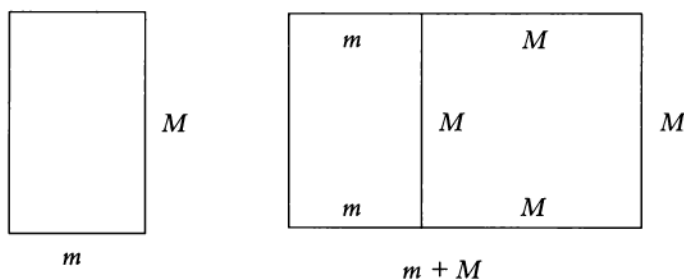
Quizás lo mejor es comenzar con algunas propiedades de los RA que nos permitan llegar mucho más allá. Como ya hemos visto, para dividir un segmento AB en otros dos de forma que la longitud del mayor de los cuales sea Φ veces el menor, hay que marcar sobre aquél un punto interior X que cumpla

$$AB/AX = AX/XB$$


Entonces, llamaremos M a la longitud de AX y m a la longitud de XB . En ellas, se cumplirá (teniendo en cuenta que AB mide $M + m$) que

$$(M + m)/M = M/m = \Phi. \quad (4)$$

Supongamos que tenemos un RA como el de la figura de la izquierda. Si colocamos en su lado mayor un cuadrado de lado igual, conseguimos un nuevo rectángulo de lados M y $(m + M)$, como vemos en la figura de la derecha. De acuerdo con la relación $(M + m)/M = M/m$, si el rectángulo original era RA (es decir, cumplía que $M/m = \Phi$), también lo es el que hemos conseguido, porque $(M + m)/M = M/m$. Con este método, además, podemos obtener RA cada vez más grandes.



Lo mismo pasa si a un RA le quitamos un cuadrado de lado igual al menor del RA, como vemos en la figura inferior, puesto que también se obtiene un rectángulo de lados m y $M - m$. Evidentemente, en este caso el rectángulo resultante es más pequeño, pero será también un RA, si cumple que

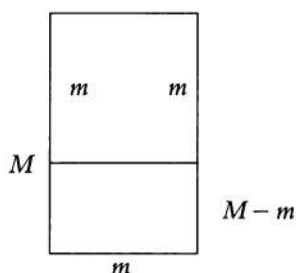
$$\frac{m}{M - m} = \Phi \leftrightarrow \frac{M - m}{m} = \frac{1}{\Phi}.$$

EL GNOMON

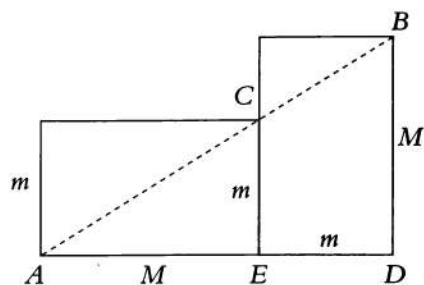
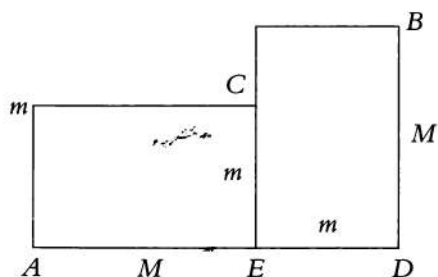
Los pensadores de la Grecia clásica observaron que algunos objetos naturales crecían en tamaño, en magnitud, pero siempre conservaban la forma. Denominaron el fenómeno crecimiento gnomónico.

El inventor e ingeniero Herón de Alejandría lo definió de la siguiente manera: *un gnomon es cualquier figura que, añadida a una figura original, produce una figura semejante a la original*. En el caso del RA, su *gnomon* es un cuadrado de lado igual a la dimensión mayor del mismo.

Como $M/m = \Phi$ por (4), será $\frac{M-m}{m} = \frac{M}{m} - 1 = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$, como queríamos demostrar.



Como en el caso de los rectángulos semejantes, existe también un método rápido y sencillo para reconocer si un rectángulo es áureo sin tener que medir sus lados y hacer la división. Tomamos dos rectángulos iguales y los colocamos uno junto al otro, el primero horizontal y el segundo vertical, con los lados en contacto, como vemos en la primera figura inferior. Entonces unimos los vértices A y B con una recta o con el borde recto de cualquier objeto, como muestra la segunda figura. Si la línea recta pasa exactamente por el vértice C se trata de dos RA.



¿Cómo se explica este hecho? Bien, recordemos el teorema de Tales: si dos paralelas cortan los dos lados de un triángulo, producen segmentos proporcionales. En la segunda figura, vemos que AB pasará por C siempre que

$$AD/DB = AE/EC.$$

Sin embargo, si hacemos aparecer los valores de cada uno de esos lados, resulta lo siguiente: $(M + m)/M = M/m$.

Y así nos topamos, de nuevo, con la igualdad (4) de definición de Φ .

Si tenemos a mano un compás áureo (véase la explicación de cómo construirlo en el recuadro de la página siguiente), basta con poner en uno de los

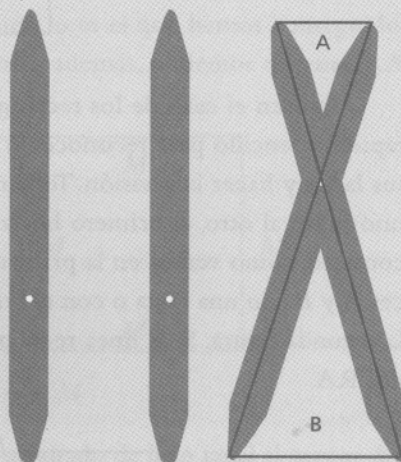
LA CONSTRUCCIÓN DE UN COMPÁS ÁUREO

El compás áureo es un sencillo instrumento que uno mismo puede construir con facilidad y que permite trazar segmentos que guarden entre sí la proporción áurea, o comprobar si dos segmentos guardan entre sí esa proporción. Hay varios métodos de construcción de un compás áureo.

El más sencillo consiste en cortar dos tiras de cartón, plástico o madera fina, acabadas en punta, de 2 cm de ancho y 34 cm de largo, en las que practicamos un agujero a una distancia de 13 cm de uno de los extremos.

Unimos ambas tiras por el agujero de manera que puedan articularse. Podemos usar un encuadernador, por ejemplo. Al moverlos obtenemos dos triángulos isósceles de lados iguales que miden 21 y 13 cm. Al ser dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, su cociente es próximo a Φ . La relación entre las distancias de las dos puntas de los extremos será también Φ .

Su uso es muy fácil. Para ver si dos segmentos están en relación áurea basta con abrir el extremo hasta que coincida con el segmento menor y, sin variar la apertura de los dos brazos del compás, poner el otro extremo en el segmento grande. Si coincide con su longitud, los dos segmentos están en relación áurea.



extremos uno de los lados y ver si la apertura del otro extremo coincide con el otro lado. Cuando esto suceda será un RA.

Construcción de un rectángulo áureo

Con nuestros últimos descubrimientos, el viaje a partir de ahora es mucho más fácil. Para construir un RA, no tenemos más que hacer uso de todas las propiedades que hemos visto hasta ahora.

Partimos de un cuadrado $ABCD$ cuyo lado será el menor del RA que vamos a construir. Marcamos el punto medio M de uno de sus lados AB . Con centro en M y radio MC (distancia de M a uno de los vértices que no están en el lado al que

El segundo método de construcción de compases áureos es más sofisticado, pero más completo en sus mediciones, pues muestra tanto la media como la extrema razón. Requiere cuatro tiras algo más estrechas, de 1 cm de ancho. Dos de ellas, deben tener una longitud de 34 cm; otra de 21 cm y la última de 13 cm. Practicamos en todas ellas dos agujeros: el primero en un extremo y el segundo, a 13 cm, como indica la primera figura. Después, las unimos de la manera que podemos ver en la segunda figura.

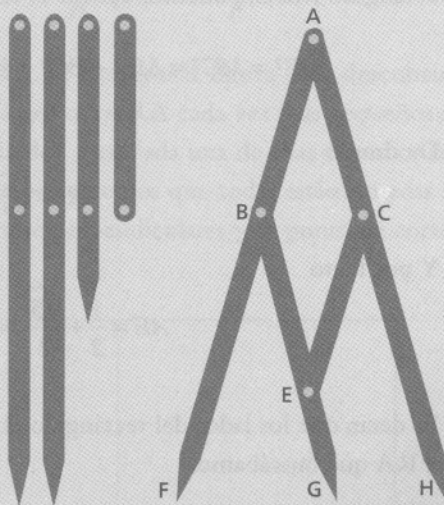
En esta construcción de compases se cumple lo siguiente:

$$AF = AH = 34 \text{ cm}$$

$$BG = 21 \text{ cm}$$

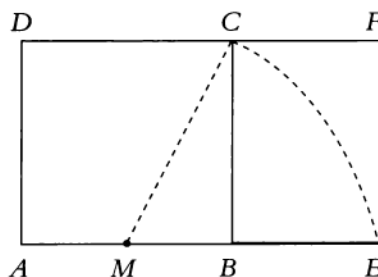
$$AB = AC = BE = CE = 13 \text{ cm}$$

$$EG = 8 \text{ cm}.$$



Si hacemos memoria, todas estas distancias que estamos encontrando son términos de la sucesión de Fibonacci. Cuando articulemos el compás, la relación entre las distancias de los extremos FG y GH será también muy próxima a Φ . Al situar los extremos F y H del compás sobre una recta cualquiera (de hasta 68 cm de longitud), el extremo G marca un punto que divide la recta en dos segmentos M , m tales que $M/m = \Phi$.

pertenece M) trazamos un arco que corte la prolongación de AB . Llamaremos E al punto por donde corta. La longitud de AE es la longitud del lado del RA que buscamos. A partir de entonces, basta con hacer la perpendicular por E que corta en F . Así, conseguimos el rectángulo $AEFD$, nuestro deseado rectángulo áureo.



Aprovechemos el RA que hemos construido para comprobar la relación áurea, calculando sus lados. Supongamos que el lado $AB = AD = 1$ y hallamos $AE = AM + ME = 1/2 + ME$. Como ME es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo MBC , podemos aplicar el teorema de Pitágoras y tendremos

$$ME^2 = MC^2 = MB^2 + BC^2 = (1/2)^2 + 1^2 = 1/4 + 1 = 5/4.$$

De donde

$$ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Y por tanto

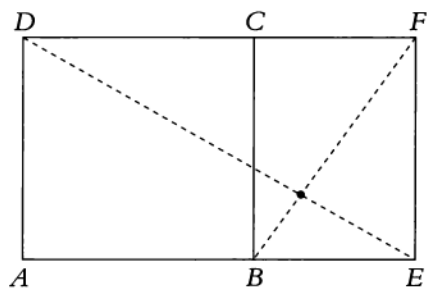
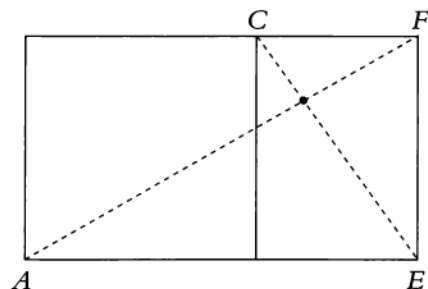
$$AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Es decir, que los lados del rectángulo $AEFD$ que hemos construido son 1 y Φ . Es el RA que buscábamos.

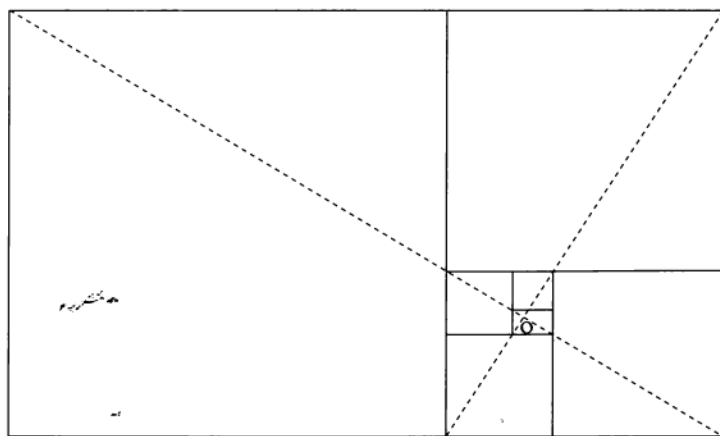
Propiedades del rectángulo áureo

Si le quitamos un cuadrado a nuestro RA recién hecho, resulta un rectángulo $BEFC$ que también es áureo. Si hacemos las diagonales de esos dos RA veremos que se cortan siempre en ángulo recto. Eso pasa con los pares AF y ED , así como en DE y BF , que son perpendiculares entre sí.

Podemos verlo en las figuras siguientes:



Consideremos un momento el RA de la segunda figura para descubrir una propiedad muy sorprendente. Si buscamos otros RA cada vez más pequeños a través de sucesivas sustracciones de cuadrados, y en cada una de ellas trazamos las dos diagonales que aparecen en la figura, observaremos que todas están situadas sobre las dos rectas DE y BF . Así, serán siempre perpendiculares y su punto de corte será siempre el mismo punto O .



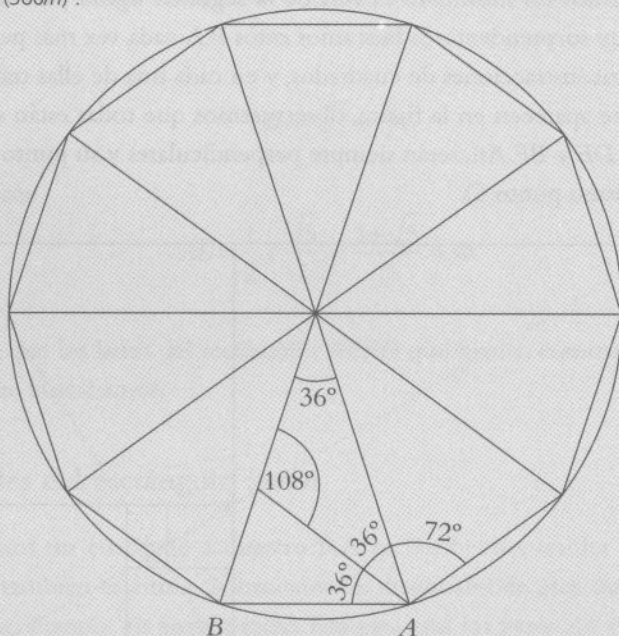
Si pudiéramos ver con un microscopio todos los rectángulos que se pueden ir formando al ir sustrayendo cuadrados, veríamos que el punto de corte de esas diagonales permanece constante aunque vayamos disminuyendo su tamaño en un factor Φ . Esta increíble propiedad es exclusiva de los RA.

El punto O es una suerte de vórtice, una especie de agujero negro, un punto de atracción infinita donde convergen los innumerables RA que puede generar nues-

POLÍGONO REGULAR Y POLÍGONO INSCRITO

Un polígono es regular cuando tiene tanto los lados como los ángulos iguales. No basta con que se dé una de las condiciones. Un rombo, por ejemplo, tiene los lados iguales, pero sus ángulos no lo son, por lo que no es regular. El polígono regular de cuatro lados es el cuadrado. Por otro lado, el rectángulo tiene los cuatro ángulos de 90° , pero sus lados no tienen la misma longitud, luego tampoco es regular.

Por su parte, el polígono inscrito en una circunferencia es aquel cuyos vértices son puntos de la circunferencia. Si se trata de un polígono regular de n lados, uniendo el centro de la circunferencia con dos vértices consecutivos del polígono, tenemos un triángulo isósceles cuyos lados iguales son dos radios, el lado desigual es el del polígono y el ángulo desigual (también llamado ángulo en el centro) es de $(360/n)^\circ$.



tra imaginación geométrica. Por las cualidades extraordinarias de esos rectángulos, se ha propuesto llamar a ese punto «el ojo de Dios».

Si inscribimos un decágono regular (esto es, un polígono de diez lados iguales, cuyos ángulos sean también iguales) en una circunferencia, la relación entre el radio de la circunferencia y el lado del polígono es exactamente Φ .

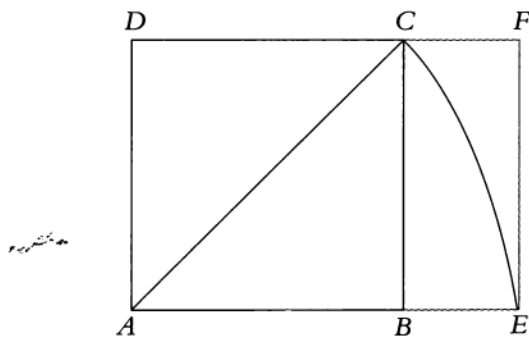
Por lo tanto, podríamos decir que un RA tiene por lados el radio de la circunferencia y el lado del decágono regular inscrito en ella. En el tercer capítulo veremos con más detalle las razones que explican este comportamiento.

Otros rectángulos notables

Como se ha visto en el recuadro de la página 47, los rectángulos de las pantallas de los televisores (4:3 y 16:9) son notables, al menos por su presencia en nuestra vida cotidiana. A continuación echaremos una mirada a otros rectángulos que nos encontramos a diario y los compararemos con los RA para apreciar mejor la singularidad de los rectángulos módulo Φ .

Rectángulo $\sqrt{2}$

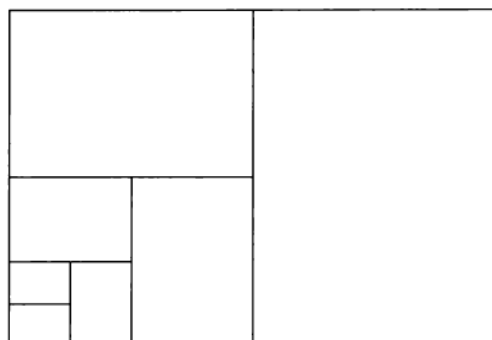
Partimos de un cuadrado $ABCD$ de lado 1. Con centro en uno de sus vértices (por ejemplo, A), y radio la distancia entre este vértice y el opuesto (en nuestro ejemplo, AC), trazamos un arco que corte la prolongación de AB en un punto que llamaremos E . La longitud de AE , por ser la diagonal de un cuadrado de lado unidad, es $\sqrt{2}$, y por tanto el rectángulo construido es de dimensiones 1 y $\sqrt{2}$. A partir de ahora, llamaremos a este tipo de rectángulos RR.



La propiedad característica de los RR es que si dividimos el lado mayor por la mitad obtenemos otro RR con la mitad de superficie del rectángulo inicial. Los lados del nuevo rectángulo serán 1 y $\sqrt{2}/2$, cuyo cociente es de nuevo $\sqrt{2}$.

En efecto $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Por tanto, el gnomon del RR es él mismo.

Este proceso se puede iterar incontables veces para obtener nuevos rectángulos RR. Lo mismo se puede hacer duplicando el lado menor de un RR: se obtiene otro RR. La siguiente figura muestra el resultado de varias iteraciones.



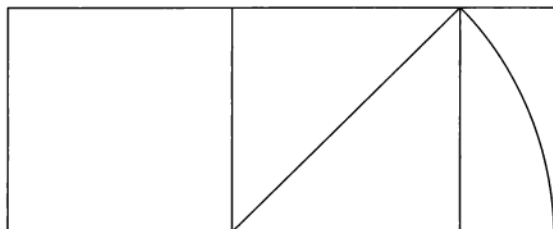
Esta propiedad de los RR se aplicó en el diseño de las hojas que se utilizan en la actualidad en papelería: el conocido formato DIN. Las letras DIN son las iniciales de Deutsches Institut für Normung, el Instituto Alemán de Normalización, que presentó el formato en 1922, siguiendo un desarrollo del ingeniero Walter Porstmann.

Los diferentes tamaños parten de una subdivisión del tamaño mayor, denominado A0, una superficie de 1 m^2 . Cada una de las subdivisiones se numeran de manera creciente (A1, A2, A3, A4...), siempre con formato RR. La proporción se mantiene simplemente cortando por la mitad cada unidad. La ductilidad y sencillez del formato lo ha convertido en un estándar internacional, utilizado en la mayoría de los países.

En términos de polígonos inscritos, el rectángulo RR es el que tiene como lados el radio de la circunferencia y el lado del cuadrado regular inscrito en ella. La historia de la arquitectura ha visto con frecuencia el uso de ese rectángulo como planta de edificios.

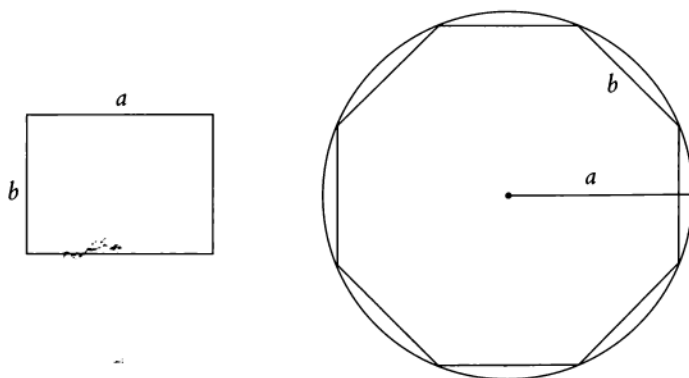
El rectángulo de plata $1 + \sqrt{2}$

El rectángulo de plata se obtiene al añadir al RR un cuadrado de lado 1. Es un rectángulo de módulo $(1 + \sqrt{2})$, que, como vimos en el capítulo anterior, es la solución de la ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$, y se llama *número de plata*. El rectángulo que obtenemos con este método es más alargado que el anterior, lo que da esbeltez a las construcciones donde se utiliza, como portales de templos o plantas de edificios.



El rectángulo cordobés

El estudio de las proporciones en los principales monumentos arquitectónicos musulmanes de Córdoba, entre los que destaca la famosa Mezquita, de mihrab octogonal, permitió al arquitecto español Rafael de la Hoz (1924-2000) encontrar el rectángulo que explica su estructura. Así, De la Hoz enmarcó las proporciones que había recogido como un rectángulo cuyos lados son el radio de la circunferencia y el lado del octógono regular inscrito en ella. El resultado es el rectángulo cordobés, de aspecto menos alargado que el RA.



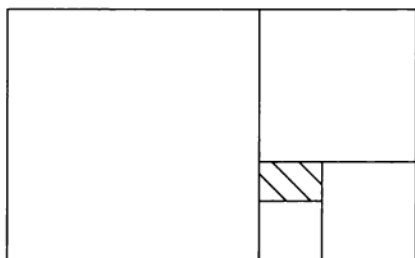
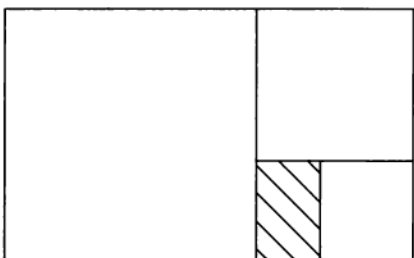
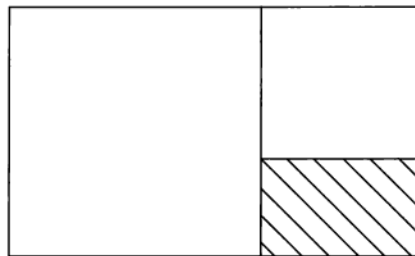
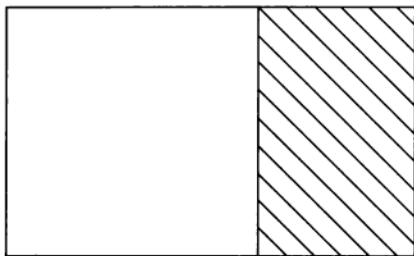
Para calcular el módulo de este rectángulo hay que hallar el lado L del octógono regular inscrito en función del radio R . Hallados éstos, se obtiene que

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \cong 1.307.$$

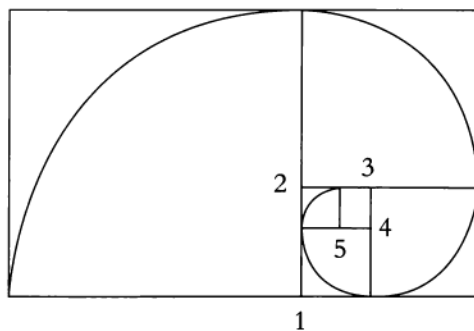
Ésta es la llamada proporción cordobesa o número cordobés.

Las espirales y el número de oro

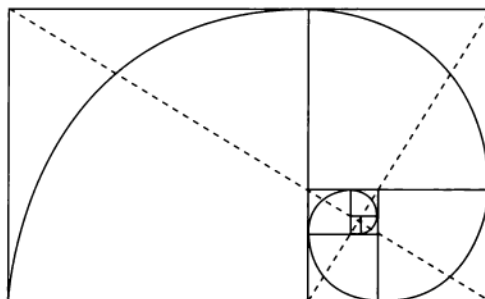
Algunas de las manifestaciones más prodigiosas de Φ se encuentran en las espirales, en las que Φ tiene comportamientos curiosos. Supongamos que partimos de un RA al que vamos restando cuadrados para obtener nuevos RA, siguiendo el proceso que ya conocemos.



En cada uno de los cuadrados que sustraemos, trazamos cuadrantes de circunferencia con radio el lado del cuadrado y centro en el vértice de cada uno de ellos. Es decir, en los puntos 1, 2, 3, 4, 5...



Si continuamos de forma indefinida con la sucesión de cuadrantes, se obtiene la llamada espiral logarítmica.



LA ESPIRAL Y JACOB BERNOULLI

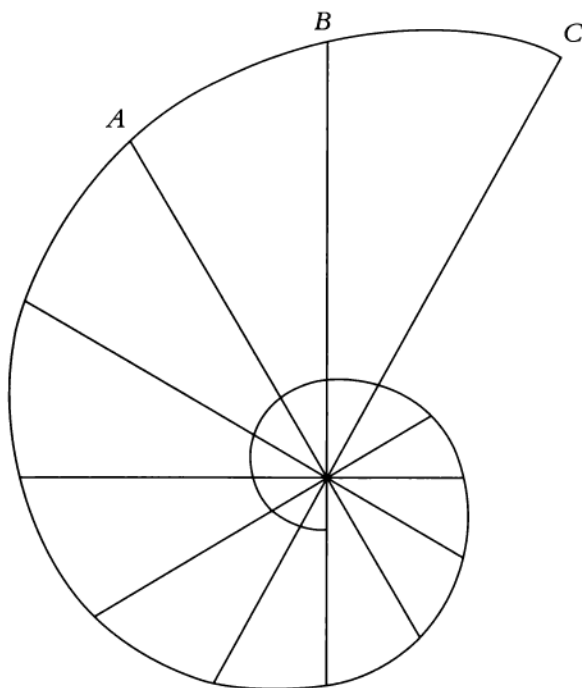
La curva espiral y sus propiedades han despertado la admiración de grandes figuras del mundo matemático. El célebre Jacob Bernoulli (1654-1705) fue particularmente seducido por las espirales, a las que dedicó años de estudio. Su atracción por ellas le llevó a pedir que se grabara una espiral en su tumba con el lema «*Eadem mutato resurgo*», que significa «*aunque transformado, resurjo siempre igual*». Sin embargo, pese a las rigurosas disposiciones del matemático, la casualidad quiso que el grabador de la lápida no esculpiera una espiral logarítmica, sino otra serie de arcos, a los que no se puede adjudicar la aseveración. Jacob Bernoulli debió de retorcerse en su tumba.



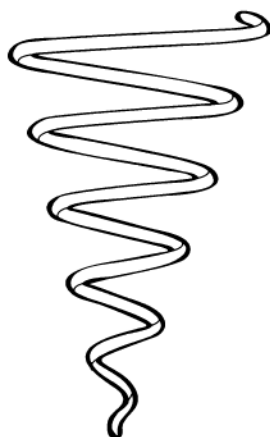
La espiral es una curva cuya forma no se altera cuando cambia su tamaño, tanto si aumenta como si disminuye. Esta propiedad se llama autosimilitud.

Otra importante propiedad de la espiral es que es equiangular, es decir, si trazamos una línea recta desde su polo, esto es su punto de inicio, hasta un punto cualquiera, el ángulo de corte es siempre el mismo. Según esta propiedad, si queremos mantener constante el ángulo con el que observamos un punto, tenemos que aproximarnos a él siguiendo una trayectoria que forme una espiral logarítmica. También se le llama espiral geométrica, porque el radio vector, es decir, la recta que une el vértice con un punto de la espiral, crece en progresión geométrica, mientras el ángulo que forma ese radio lo hace en progresión aritmética.

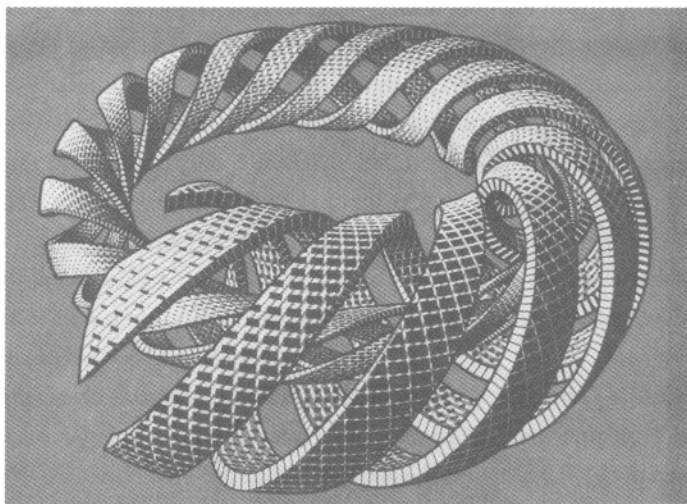
De manera estricta, la curva que acabamos de crear por este método no es una espiral, puesto que está formada por diferentes arcos de circunferencia (cuadrantes) unidos de forma artificial, pero es una buena aproximación de una espiral logarítmica. La espiral no es tangente a los cuadrados, sino que los corta, aunque con ángulos muy pequeños. La espiral logarítmica auténtica es la figura siguiente:



Si se ejecuta el mismo crecimiento teniendo en cuenta una variación similar en la altura, conseguimos una espiral tridimensional como la del dibujo:



Las cualidades de la espiral no sólo han atraído a los científicos, sino a muchos artistas.



El neerlandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972), conocido por sus figuras imposibles, teselaciones y mundos imaginarios, cimentó su obra de forma sólida sobre las matemáticas, y usó la espiral con profusión, como en el caso del grabado, Espirales, de 1953.

No hemos agotado aún los paisajes espirales; en realidad, no hemos hecho más que iniciarnos en ellos. Veremos más adelante cómo aparecen en los triángulos áureos y cuán recurrente y hermosa es su figura en la naturaleza.

El número de oro y el pentágono

Los asirios descubrieron de manera natural el pentágono; aparece en sus tablillas de barro, donde podemos ver marcas de los cinco dedos en la arcilla blanda. La figura supuso un problema para los griegos. En su opinión, el único método válido para trazar figuras geométricas eran la regla y el compás, pero con ellos no es posible dibujar de forma directa un pentágono regular.

El pentágono regular

La construcción con regla y compás, según la iniciaron los antiguos griegos, y es comprendida en su término tradicional, es un método con muchas restricciones, algunas de las cuales suenan un poco caprichosas. Consiste en el trazado de puntos, rectas (o segmentos) y circunferencias (o arcos) con una regla de longitud infinita, sin marcas que permitan medir o trasladar distancias, un solo borde y un compás. Por ese procedimiento, puede trazarse la mediatriz de un segmento (perpendicular en su punto medio), la bisectriz de un ángulo, el simétrico de un punto respecto a otro, la recta paralela o la perpendicular a una dada por un punto, la proyección de un punto sobre una recta, y también se puede dividir un segmento cualquiera en un número dado de partes iguales.

Hay una serie de famosos problemas clásicos, cuya celebridad se debe precisamente a que no pueden resolverse con regla y compás. Por ejemplo, la cuadratura del círculo (o sea, encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado), la duplicación de un cubo (o sea, hallar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble que el original) o la trisección de un ángulo (o sea, dividir un ángulo dado en tres ángulos iguales). Por el procedimiento directo de regla y compás, tampoco se pueden construir algunos polígonos regulares, como el heptágono o el pentágono.

Sin embargo, el pentágono regular sí puede trazarse indirectamente con regla y compás con la ayuda de Φ , y de esa forma el número Φ entró en el espacio de la

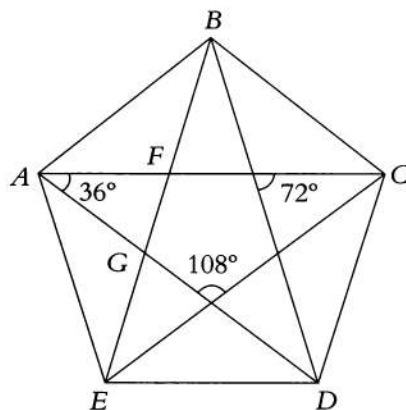
K. F. GAUSS (1777-1855)

El matemático alemán Karl Friedrich Gauss es una de las grandes figuras de la ciencia, conocido por el título póstumo de «Príncipe de los Matemáticos». Escogió dedicarse a las matemáticas, de entre otras disciplinas en que también destacaba, tras demostrar que el heptadecágono regular, el polígono de 17 lados, se puede construir con regla y compás. El descubrimiento sería clave no sólo para su carrera, sino también para el desarrollo futuro de las matemáticas. Consiguió el resultado cuando todavía no había cumplido los 19 años.



geometría griega. También fue uno de los motivos del despertar del interés de los clásicos en esta proporción.

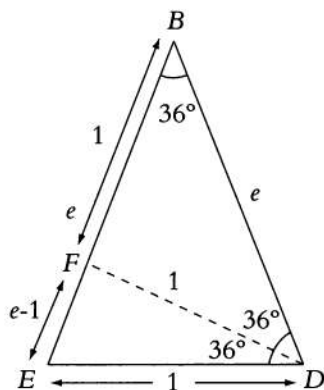
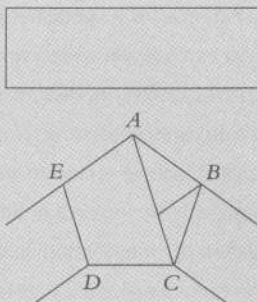
Ahora, consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales.



Consideremos el triángulo BED , uno de los tres tipos de triángulos isósceles que aparecen en la figura. Sus lados iguales $BE = BD$ son la medida e de la diagonal del pentágono (que equivale al lado de la estrella pentagonal). Por otra parte, el lado ED es el lado p del pentágono, que tomamos como unidad $p = 1$. Podemos comprobar que se cumple la relación $EB / ED = e / p = e / 1 = \Phi$ que es la relación áurea. Es decir, que $e = \Phi$.

UN PENTÁGONO REGULAR CON UNA TIRA DE PAPEL

Pese a todas las restricciones, hay una forma sencilla de construir un pentágono regular, siempre que no nos pongamos muy rigurosos con el resultado. Basta con coger una tira de papel y hacerle un lazo o nudo. Lo que nos queda delimita un pentágono regular. Se puede observar el dibujo de la tira. Tenemos el pentágono regular ABCDE, cuyo lado es la anchura de la tira inicial.



Haciendo la bisectriz del ángulo D , se obtiene el triángulo DEF . Éste tiene los mismos ángulos que el original BED , y por tanto, ambos son semejantes. Luego se cumple que

$$EB / ED = ED / EF. \quad (1)$$

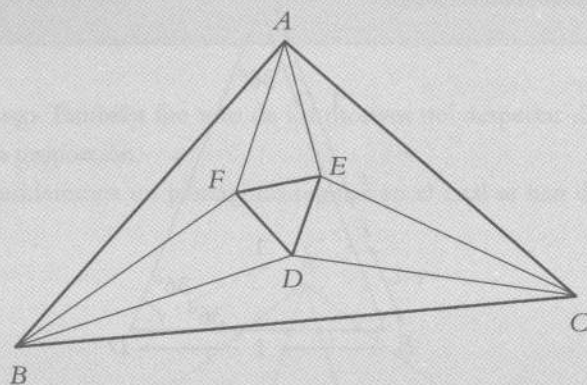
Como $ED = FD = FB = 1$ y $EF = EB - 1$ sustituyendo en (1) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{EB}{1} &= \frac{1}{EB-1} \\ EB^2 - EB &= 1 \\ EB^2 - EB - 1 &= 0 \\ EB &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi. \end{aligned}$$

EL TEOREMA DE MORLEY

Como los griegos no podían realizar la trisección de un ángulo, le dedicaron poca atención. Por eso no conocían un teorema tan sencillo y elegante como el de Morley: si se dividen en tres partes iguales, es decir, trisecan, los ángulos interiores de un triángulo cualquiera por medio de pares de semirrectas que parten de cada vértice, los pares de semirrectas adyacentes a cada lado se cortan en tres puntos que determinan siempre un triángulo equilátero. Es decir, que no importa el tipo de triángulo del que partamos, siempre se obtiene uno equilátero por intersección de las rectas trisectrices.

Al contrario que la mayoría de resultados sobre triángulos, ya conocidos por los griegos y con más de veinte siglos de historia, este teorema tiene poco más de cien años. Fue descubierto en 1904 por Frank Morley (1860-1937) y no fue publicado hasta veinte años más tarde.



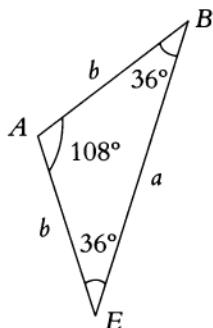
El triángulo equilátero FED es un triángulo Morley.

Así, se consigue demostrar lo que pretendíamos: que la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es Φ .

Pero las relaciones continúan dentro del pentágono estrellado. Si consideramos el pentágono y los triángulos que aparecen al marcar sus diagonales, vemos que sólo hay tres ángulos diferentes: 36° , 72° y 108° . Además, como 72 es el doble de 36, y 108 es el triple de 36, son todos múltiplos de 36° .

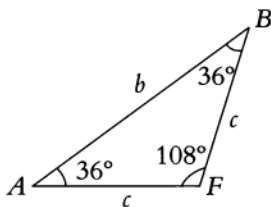
Aparecen muchos triángulos isósceles, pero sólo tres tipos diferentes: los triángulos ABE , ABF y AFG . Los demás son semejantes a alguno de éstos y sólo hay cuatro segmentos de longitudes en ellos. Son los que llamaremos $BE = a$, $AB = AE = b$, $AF = BF = AG = c$ y $CF = d$, siendo además $a > b > c > d$.

En cada uno de estos triángulos, aplicamos el teorema del seno, que establece que en cualquier triángulo, el cociente entre la longitud de un lado y el seno de su ángulo opuesto es constante. En el triángulo ABE :



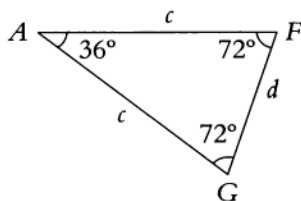
$$\frac{a}{\sin 108^\circ} = \frac{b}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

En el triángulo ABF :



$$\frac{b}{\sin 108^\circ} = \frac{c}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

Y por fin, en el triángulo AFG :



$$\frac{c}{\sin 72^\circ} = \frac{d}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

Como $72^\circ = 108^\circ - 36^\circ$, y los senos de dos ángulos suplementarios son iguales, se tendrá que $\sin 72^\circ = \sin 108^\circ$.

Por tanto, podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = 1,618033988...$$

La trigonometría nos ha ayudado a deducir que al ordenar las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una y la siguiente es constante e igual al número de oro.

Podemos obtener esa relación de otra forma, a partir de la primera de estas igualdades, teniendo en cuenta que $c = a - b$, y tomando como unidad el lado del pentágono, es decir $b = 1$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a = \Phi.$$

Como vemos, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

El triángulo áureo

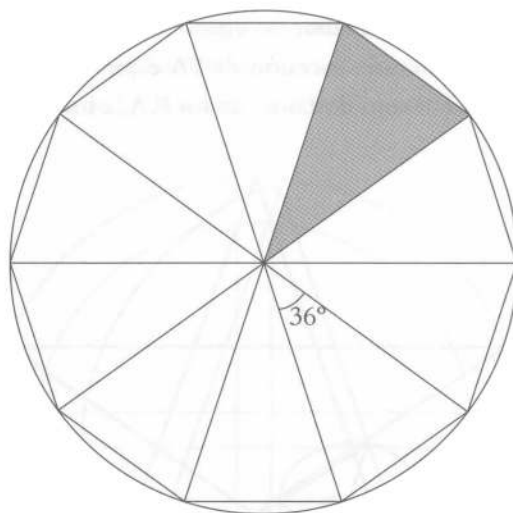
Acabamos de ver que el pentágono y sus diagonales conforman dos tipos de triángulos isósceles. El primero tiene ángulos 36° , 36° , y 108° , mientras que el segundo lo tiene de 36° , 72° y 72° . En ambos casos, la relación entre el lado mayor y el menor es igual a Φ . Por eso se les llama triángulos áureos (y nosotros les llamaremos TA en lo sucesivo). En ocasiones, se da nombres específicos a cada uno: se llama triángulo áureo al de 36° , 72° y 72° , mientras que el otro, de 36° , 36° , y 108° , se denomina gnomon áureo. Nosotros no haremos distinciones.

Así pues, al trazar las diagonales de un pentágono regular, vemos surgir en su centro otro pentágono regular, rodeado por TA. Asimismo, las puntas de la estrella son también TA.

Por intermedio de un TA, se puede construir un pentágono regular con regla y compás. Se parte de un segmento de longitud 1, del que se construye su razón áurea (como hemos visto en el capítulo anterior), de longitud x . Entonces, se construye un TA de lados x y 1. Se hace una circunferencia de radio 1, con centro en el vértice de ángulo 36° (opuesto al lado de longitud x). El lado del decágono inscrito en ella es x . Una vez construido el decágono, unimos dos vértices alternos, dejando cada vez uno en medio sin unir. Con ello, habremos construido un pentágono regular.

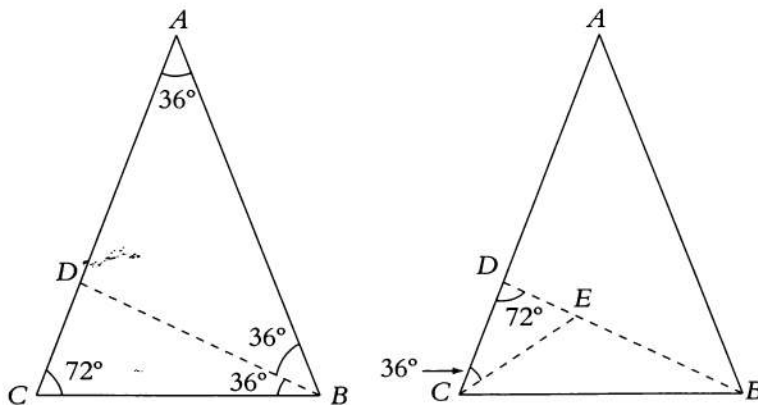
El mismo método serviría para construir polígonos regulares de 10 lados, que es lo que hacían los geómetras griegos de la Antigüedad en un ejercicio de admiración por las posibilidades matemáticas de la proporción áurea.

Según la construcción que acabamos de ver, un RA tiene por dimensiones el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia y el radio de la misma.

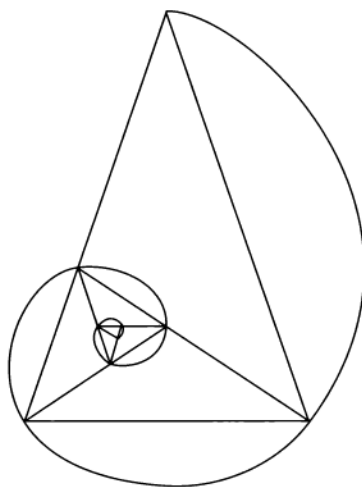


Ya vimos en un capítulo anterior que se puede obtener una espiral logarítmica a partir de un RA, pero también puede obtenerse a partir de un TA ABC de ángulos 36° , 72° y 72° (en el que será $AB/BC = \Phi$). Si bisecamos el ángulo en B , obtenemos dos triángulos: DAB y BCD . El primero tiene ángulos de 36° , 36° y 108° , luego es un triángulo áureo.

El segundo, BCD , es semejante al original, luego también lo es. Si continuamos el proceso, bisecando el ángulo C , obtenemos otro CDE , que vuelve a ser semejante a los dos anteriores.



Es un buen momento para recordar cómo obteníamos RA de menor tamaño en el interior de un primer RA por el proceso de sustraer cuadrados. En el caso de los TA, si seguimos haciendo bisectrices, iremos consiguiendo TA más reducidos en el interior del primero. El proceso equivale a ir sustrayéndole un gnomon áureo. Con ello, se obtiene una sucesión de TA espiral de triángulos que converge, de manera similar al «ojo de Dios» de los RA, a un punto de crecimiento infinito.



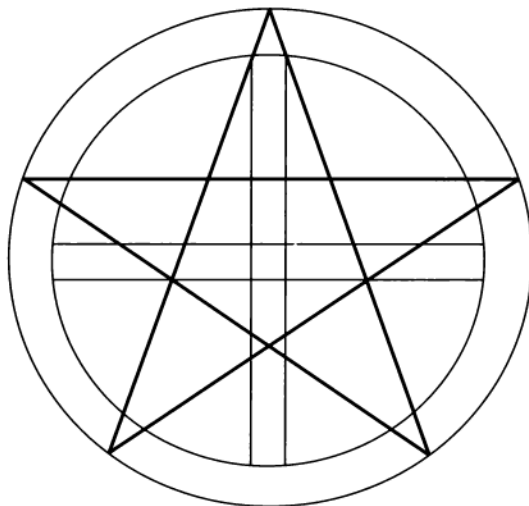
El simbolismo de la estrella pentagonal

No sería nada descabellado preguntarse por qué razón las estrellas que la humanidad ha observado desde siempre en el firmamento han acabado representándose mediante pentágonos estrellados. El sentido común hace pensar que se debe a su centelleo, provocado en nuestra percepción por la variación de densidad del aire y los fenómenos atmosféricos. Sea como fuere, poco ha cambiado este conjunto de circunstancias desde los primeros tiempos en que nuestros antepasados comenzaron a escrutar los cielos con la intención de descifrar sus significados ocultos. Las representaciones de estrellas en forma de pentágonos estrellados son muy antiguas; se han encontrado tanto en tablillas mesopotámicas como en jeroglíficos egipcios.

El símbolo de la estrella pentagonal, llamado pentalfa, fue el distintivo de los pitagóricos, y servía para identificar a los miembros de su asociación secreta. Para ellos, la péntada, es decir el cinco, era el número de la armonía en la salud y la belleza, pues suponía una equilibrada combinación del dos, el primer número par, o díada, y el

tres, el primer impar completo, la tríada. Como escribió el escritor y profesor de estética rumano Matila Ghyka, «el pentalfa o pentagrama será, pues, a la vez, el símbolo del Amor creador y el de la Belleza viva, del equilibrio en la salud del cuerpo humano», y queríamos añadir que, por extensión, también el símbolo del ser humano.

El pentalfa tiene una larga historia como símbolo de sociedades secretas. Figura también en el anagrama de los Rosacruz y con frecuencia, en los de las logias masónicas.



Pentalfa, figura geométrica que tiene una larga historia como símbolo de sociedades secretas. Figura también en el anagrama de los Rosacruz y con frecuencia, en los de las logias masónicas.

La estrella pentagonal es una figura de lo más común a nuestro alrededor como imagen gráfica de los significados más dispares. Es el símbolo de las estrellas de Hollywood en el Paseo de la Fama de Los Ángeles, y a la vez, el símbolo de muchos partidos revolucionarios. Sus cinco vértices representan el internacionalismo, asociado cada uno con un continente. En combinación con el color rojo, simboliza el sufrimiento de los oprimidos en su lucha por la emancipación y la sangre que se derrama para conseguirlo.

Su poder simbólico lo hace protagonista de multitud de banderas, no sólo las que profesan una ideología revolucionaria. Asoma en las banderas de algunos países de religión musulmana, como Marruecos, representando los cinco mandamientos del Islam. También son pentagonales las estrellas que indican cada uno de los estados de la Unión en la bandera de Estados Unidos.

MATILA GHYKA (1881-1965)

El príncipe Matila Ghyka fue un escritor y diplomático rumano que acabaría ejerciendo de profesor de Estética en Estados Unidos. Fue uno de los estudiosos contemporáneos de la proporción áurea, que trató en libros ya considerados clásicos, como *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* (1927) y *El número de oro* (1931), con los que la puso otra vez de actualidad en la cultura europea. En ellos presentó una tesis muy conocida hoy en día: que los artistas griegos de la Antigüedad clásica utilizaban la relación áurea de forma consciente y deliberada. Aunque es muy popular, esa concepción no está comúnmente aceptada, y sigue siendo motivo de debate.

Los libros de Ghyka tienen vocación totalizadora y sintetizan el saber clásico, con especial atención al platonismo y su noción de que los números, en cierto modo, «existen» más allá de las relaciones abstractas que expresan. Tuvieron gran éxito en todo el mundo, y no estuvieron exentos de polémica, en la que tuvieron destacados y fervientes defensores, como el poeta Paul Valéry.

Embaldosados periódicos y no periódicos

En nuestros ajetreados desplazamientos de ciudadanos contemporáneos, no tenemos mucho tiempo para mirar las nubes o los pájaros en los árboles, pero tampoco nos fijamos mucho en el suelo que pisamos. Por eso, no percibimos la geometría sobre la que andamos (además de dar de vez en cuando algún tropiezo). A continuación nos ocuparemos de la forma que tienen las baldosas y los ladrillos de nuestro alrededor, lo que nos permitirá introducirnos de lleno en las combinaciones ordenadas de estos últimos: los mosaicos.

Todos sabemos lo que es un mosaico. Sin embargo, para el trato matemático que vamos a darle a continuación, quizás sería bueno consensuar una definición precisa, que nos sitúe el concepto allá donde lo queremos. Un mosaico será, pues, el recubrimiento de un plano sin dejar huecos y sin solapamiento, que se hace mediante las piezas que llamamos teselas (las baldosas en lenguaje coloquial). Por tanto, en su concepción matemática, un mosaico ha de cumplir dos condiciones: las piezas no pueden superponerse ni dejar huecos sin cubrir.

Los mosaicos que más interesan a las matemáticas son aquellos en que las teselas son polígonos, pues en ellos los polígonos comparten sus aristas, es decir, hacen coincidir sus vértices, y son por tanto un excelente campo de experimentación geométrica. Estudiarlos puede parecer una tarea ardua, incluso con las

MEDIDA DEL ÁNGULO DE UN POLÍGONO REGULAR

Buscamos la forma de hallar el valor del ángulo de un polígono regular de cualquier número de lados. Como todos los ángulos del polígono regular son iguales, la operación será equivalente a calcular la suma de los ángulos de un polígono regular de un número de lados prefijado. Dividimos el resultado por el número de lados y obtendremos el valor de cada uno de los ángulos.

Para calcular la suma de los ángulos de un polígono de A lados, se elige un vértice cualquiera de éste y se trazan las diagonales que resultan de unirlo con todos los demás vértices. Hay $(A-3)$ diagonales, ya que se puede unir ese vértice con todos los demás, menos con los dos contiguos. Las diagonales forman $(A-2)$ triángulos. Así, la suma de los ángulos de esos triángulos es la misma que la de los ángulos del polígono original. Pero los ángulos de cualquier triángulo suman 180° , como sabemos. Por tanto, la suma total será $S = (A-2) \cdot 180^\circ$.

Cada uno de los ángulos de un polígono regular de A lados medirá $s = \frac{(A-2) \cdot 180}{A}$.

Sustituyendo A en esta expresión por cada uno de los números de lados de los polígonos más usuales podemos configurar la siguiente tabla:

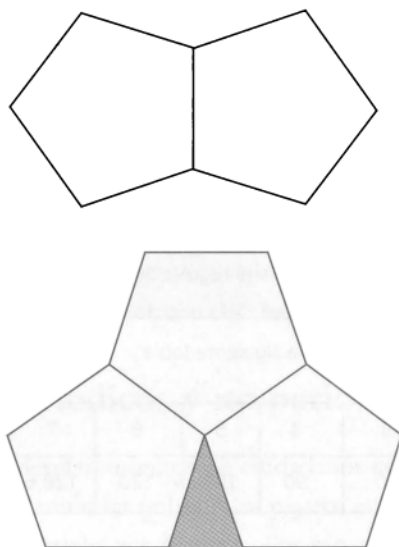
Número de lados	3	4	5	6	7	8	10	12
Ángulo (grados)	60	90	108	120	128,6	135	144	150

restricciones que hemos expuesto, pero está perfectamente resuelta en los suelos y paredes de nuestras casas y centros de trabajo, y también en las calles que transitamos a diario.

El reto que plantea un mosaico es encontrar o diseñar el motivo mínimo que se repite para llenar el plano. Ese motivo mínimo puede considerarse una simple tesela que llena el plano por traslaciones, esto es, sin giros ni simetrías. Con este proceso obtendríamos lo que se llama un mosaico periódico. Por el contrario, los mosaicos no periódicos son aquellos que no presentan un motivo mínimo para obtener el recubrimiento por traslaciones. En todos ellos se encuentra la proporción áurea.

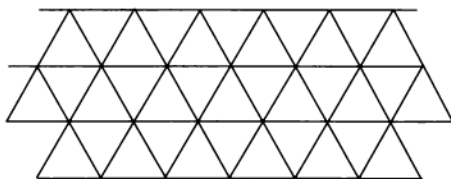
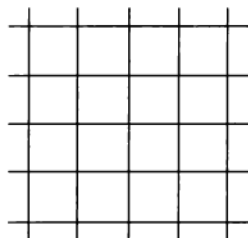
Supongámonos que hay que embaldosar el suelo (o cualquier superficie plana) con teselas de un mismo tipo, un polígono regular. ¿Con qué tipo de baldosas se puede conseguir? Se suele considerar que sirve cualquier polígono regular, pero no es así. Con pentágonos regulares, por ejemplo, no se puede embaldosar. Para

comprobar esta aseveración basta con dibujar y recortar unos cuantos pentágonos regulares iguales, disponerlos sobre una superficie plana e intentar cubrir con ellos una superficie equivalente a la suma de sus áreas. Primero probamos a colocarlos tocándose los vértices. Con los dos primeros no hay ningún problema, pero al añadir el tercero vemos que la figura no se cierra; sobra un espacio que no se puede llenar con otro pentágono.

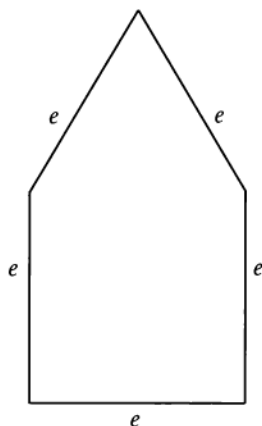


El ángulo de un pentágono regular es de 108° . Uniendo tres pentágonos, los ángulos suman $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$. El espacio se cerraría si sumaran 360° , una vuelta completa. Nos faltan 36° . Si añadimos otro pentágono, intentando encajarlo de alguna manera, tendremos el problema contrario: nos sobran grados.

Acabamos de deducir una condición imprescindible para embaldosar con polígonos iguales: la suma de un número entero de ángulos iguales ha de ser 360° . Visto al revés, el ángulo del polígono regular para embaldosar debe ser divisor de 360° . Veamos: los divisores de 360 son 120, 90 y 60. ¿Qué polígonos tienen esos ángulos? El hexágono regular, el triángulo equilátero y el cuadrado. He aquí las únicas baldosas-polígonos regulares con los que se podrá embaldosar. Como un hexágono se puede dividir en seis triángulos equiláteros, se puede decir que sólo hay dos posibilidades de llenar el plano con polígonos regulares: las tramas cuadradas y las tramas triangulares. Podemos observarlas en los suelos y paredes a nuestro alrededor; son ampliamente utilizadas.

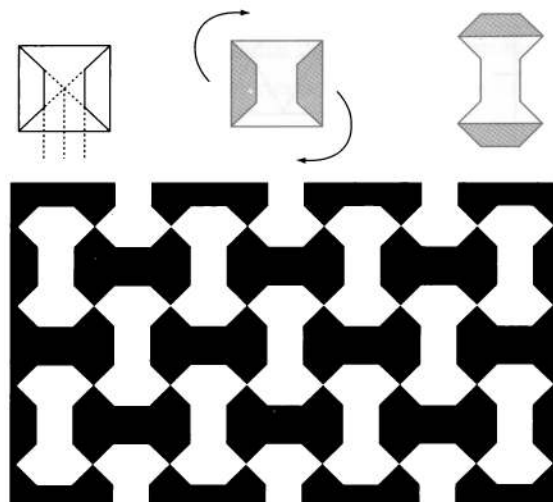


No abandonaremos tan alegremente a los pentágonos, con la idea de que son inservibles para nuestros propósitos. En realidad, sí es posible embaldosar con pentágonos, siempre que no sean regulares. Por ejemplo, el pentágono formado por un cuadrado y un triángulo equilátero: la clásica representación de un sobre abierto. Es un polígono equilátero, pero sus ángulos no son iguales. Se conocen otros 13 tipos de pentágonos no regulares que también embaldosan. Si su uso no es muy común es porque no son muy estéticos; en este caso, la geometría es inocente.



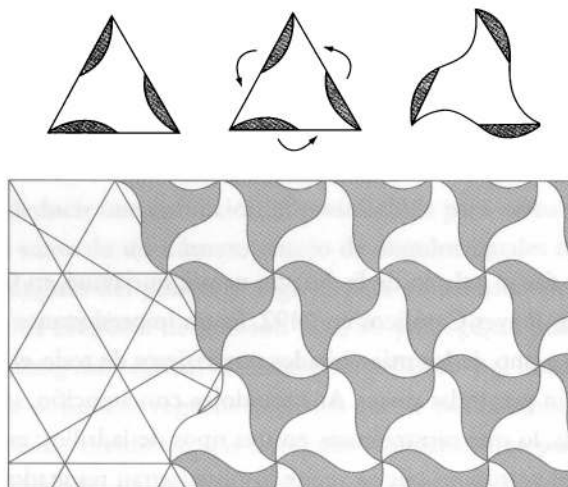
La Alhambra fue el palacio de la dinastía nazarí, que reinó en Granada hasta su conquista por los Reyes Católicos en 1492. Es un impresionante monumento de arte geométrico y uno de los más visitados por viajeros de todo el mundo. En ella, los mosaicos están por todas partes. Analizándolos con atención, se puede ver que la base es sencilla, lo que mostraremos en tres tipos de ladrillos; es la traslación de estos últimos y el patrón en que se repite los que logran resultados sorprendentes. Los monumentos de arte musulmán o mudéjar presentan con frecuencia mosaicos obtenidos por métodos similares a los que vamos a ver.

El primer tipo de ladrillo de la Alhambra es el llamado «hueso» o «hueso nazarí». A continuación se muestra cómo se genera y el diseño que produce.



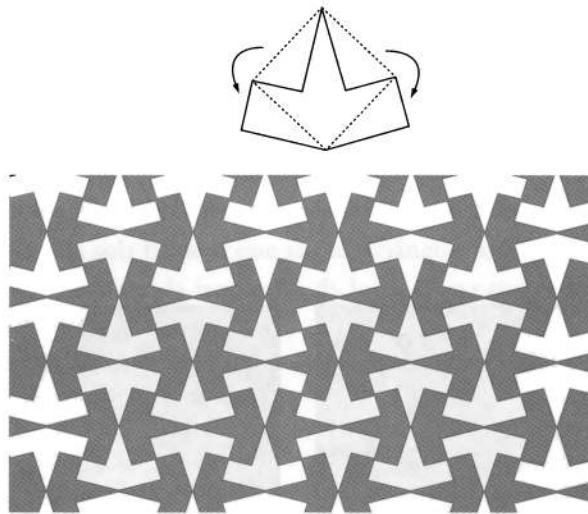
A partir de un cuadrado se trazan las diagonales, se divide su base en cuatro segmentos iguales y se trazan líneas verticales en los cortes de dichos segmentos. Luego, se extraen los paralelogramos resultantes del cruce de las líneas y se colocan en la parte inferior del recuadro.

El segundo, la «pajarita», viene de una trama triangular y produce mosaicos muy utilizados hoy en día.



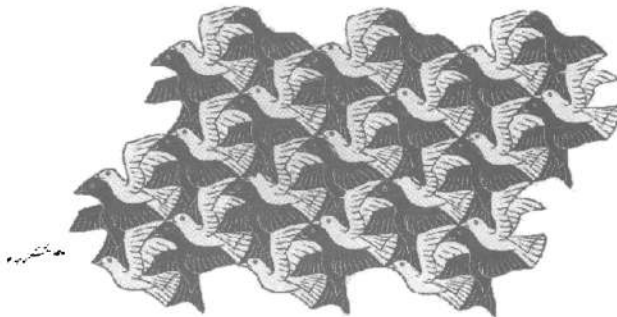
Se parte de un triángulo equilátero y se traza una curva desde los vértices hasta la bisectriz de cada lado. Se extraen las superficies resultantes entre la curva y los lados y se colocan en el exterior.

El tercer ejemplo es muy peculiar. Su baldosa base procede de una trama cuadrada y da un mosaico de «clavos».



A partir de los lados de un cuadrado se dibujan dos triángulos rectángulos en su interior cuya hipotenusa tenga la longitud de un lado. A continuación, se extraen los triángulos y se colocan apoyados exteriormente en los lados opuestos.

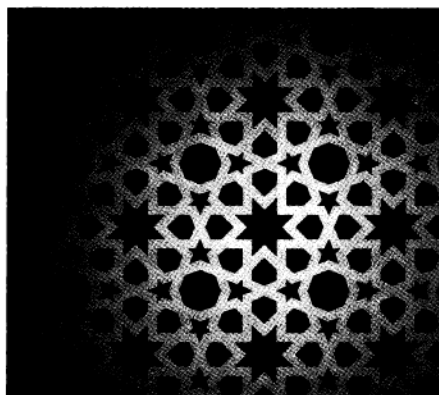
Si revisamos las manifestaciones artísticas del mosaico estrictamente matemático, estamos obligados una vez más a invocar al artista neerlandés Escher. El fuerte sabor geométrico de sus obras no nos permite alejarnos demasiado de él. Escher nació en el cambio de siglo entre el XIX y el XX, y tuvo tiempo de conocer en profundidad y emplear en sus trabajos las matemáticas contemporáneas. Sin embargo, su interés en los mosaicos se inició en una visita a la Alhambra en el año 1936.



Mosaico de Escher con un motivo de aves que, no siendo figuras geométricas, logran llenar una superficie sin dejar huecos.

Hasta ahora hemos visto tramas regulares (la triangular y la cuadrada) con un solo tipo de ladrillos, pero también se pueden conseguir mosaicos *semirregulares* cuyos ladrillos sean una pareja de polígonos regulares distintos entre sí. La única condición es que los ángulos del ladrillo resultante sumen 360° .

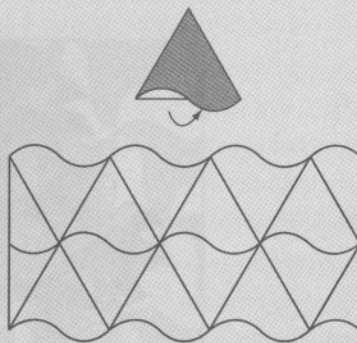
Muchos son los diseños que pretenden llenar una superficie sin dejar huecos por medio de un motivo repetido. Por citar algunos, tenemos los esgrafiados, las rejas o persianas de cerramientos, los pavimentos de mármol, las celosías o las telas con un dibujo, así como los diseños que se usan en las labores, sea media, ganchillo o bordados.



Las rejas, los mosaicos y los diseños de telas suelen usar un motivo repetido para llenar huecos. Éstos suelen ser motivos geométricos.

MOSAICOS DE DISEÑO PROPIO

Diseñar mosaicos como los de Granada no es sencillo, pero supone un interesante ejercicio pedagógico que se practica en muchas escuelas de enseñanza secundaria. No se trata simplemente de crear un diseño ingenioso, sino de practicar con las condiciones del mosaico en su concepción matemática. Observar algunos ejemplos quizás incite al lector al diseño de algún mosaico propio.

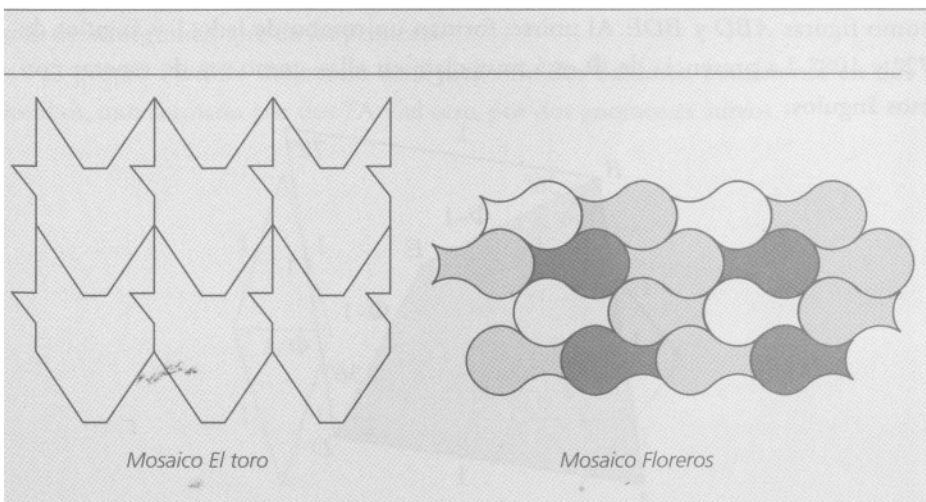
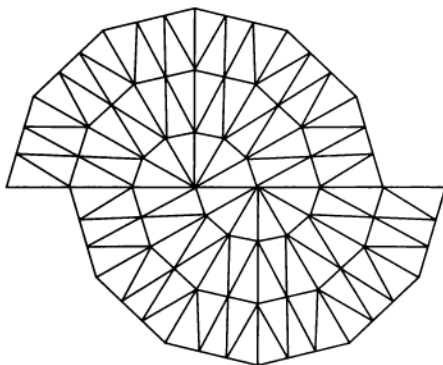
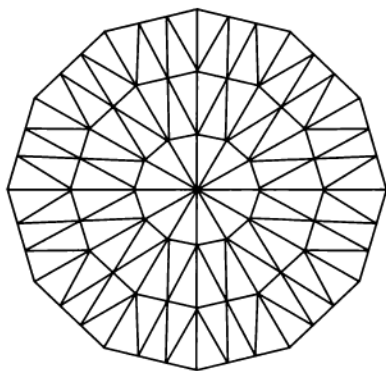


Mosaico Tejas

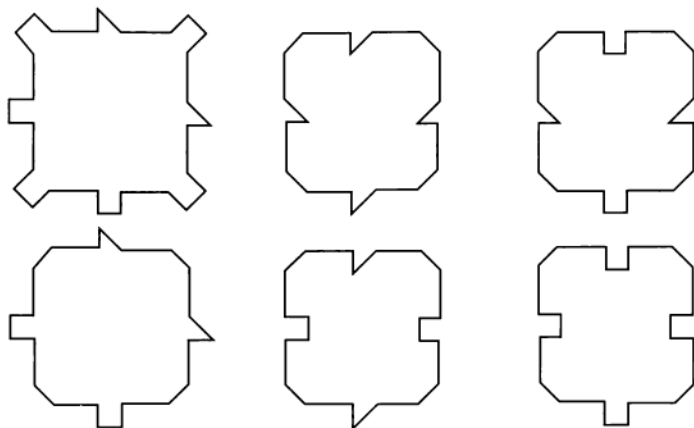
Los «mosaicos de Penrose»

La mosaicos no periódicos son aquellos en que no existe un motivo mínimo que llene todo el plano por traslación. Parece que la construcción de mosaicos no periódicos, si no imposible, será muy complicada o por lo menos exigirá el uso de muchas losetas diferentes. Hasta las décadas de los sesenta y setenta del siglo pasado, constituyó todo un reto del pensamiento matemático.

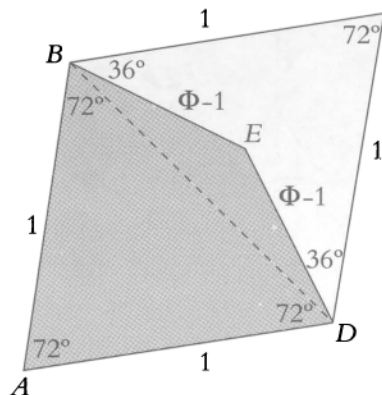
La primera posibilidad es hacer mosaicos radiales. Se podría hacer, por ejemplo, a partir de una sola baldosa que sea un triángulo isósceles. Si se corta por la mitad y se desplaza hacia la izquierda, da lugar a una pavimentación espiral no periódica.



Otro desafío fue conseguir un conjunto de teselas que sólo dieran mosaicos no periódicos. Durante largo tiempo, la comunidad matemática se empeñó en ello, pero sólo se encontraron ejemplos que necesitaban gran cantidad de losetas básicas. En 1971, el matemático estadounidense Raphael Mitchel Robinson diseñó un conjunto que usaba sólo seis losetas, obtenidas añadiendo salientes y entrantes en ladrillos cuadrados, imprescindibles para conseguir encajarlos.

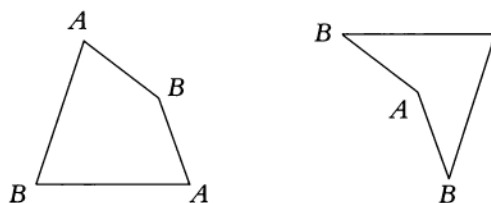


En 1973, el físico y matemático sir Roger Penrose (nacido en 1918) consiguió reducir el número de baldosas a cuatro. Un año después, lo redujo a dos. Con dos simples teselas, Penrose era capaz de construir mosaicos no periódicos. Sus dos ladrillos se llaman Cometa y Flecha. Podemos verlos en la ilustración, como figuras ABD y BDE . Al unirse, forman un rombo de lado 1 y ángulos de 72° y 108° . La presencia de Φ está muy clara en ellas, como era de esperar con esos ángulos.



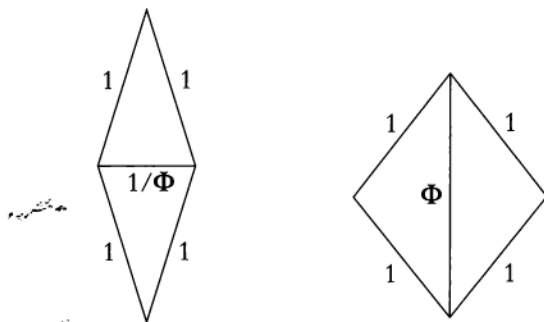
Cometa (sombreada en la figura superior) está formada por dos TA unidos por uno de sus lados iguales. Por eso, los dos mayores tienen por medida 1, y los dos pequeños, $\Phi - 1 = 1/\Phi$. Tiene tres ángulos de 72° y el cuarto es de 144° . Flecha está formado por dos gnomones áureos unidos por sus lados más pequeños. Es un cuadrilátero cóncavo cuyos lados coinciden con los de Cometa. Tiene los siguientes ángulos: dos de 36° , otro de 72° y un cuarto de 216° (mayor de 180° , por tanto).

Evidentemente, con estos dos ladrillos también se pueden hacer teselaciones periódicas, puesto que, en forma de rombo, permiten teselar. Si nos ponemos muy estrictos y queremos evitarlo, existe una manera. Se puede identificar cada uno de los vértices (por ejemplo, con una letra) e imponer la condición de que, al juntar los lados, sólo se puedan poner en contacto vértices con el mismo nombre (es decir, la misma letra).



A medida que prolongamos cada «mosaico de Penrose», la relación entre el número de piezas de los dos tipos tiende al número áureo. De forma intuitiva, parece que harían falta más Flechas que Cometas, pero sucede justo al revés. Hay Φ veces más de las segundas que de las primeras.

El propio Penrose desarrolló otro juego de dos baldosas, consistente en dos rombos, uno formado por dos TA y el otro, por dos gnomones áureos.



Para formar mosaicos no periódicos con ellos hay que marcar los lados o los vértices de alguna forma. En el mosaico acabado, intervienen piezas de cada tipo en una proporción Φ , predominando los ladrillos del tipo achaparrado por encima de los del tipo estilizado.

Juegos con el pentágono estrellado y la proporción áurea

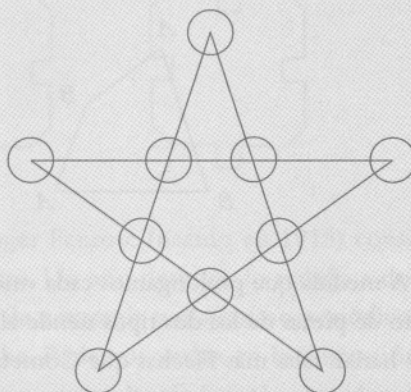
La mayoría de los juegos de azar tienen una base matemática, por eso no es difícil encontrar juegos relacionados con la proporción áurea. Por otro lado, la estrella pentagonal ha dado forma a los tableros de muchos juegos desde tiempos remo-

LAS DAMAS ÁUREAS

Pentalfa, *La estrella de oro*, las *Damas áureas* y *Cuervos y buitre* son sólo algunos de los juegos milenarios con tablero en forma de pentágono estrellado. Aunque son muy antiguos, la mayoría siguen jugándose hoy en día y no es difícil encontrar una descripción de sus reglas. Explicaremos aquí las reglas de *Pentalfa*, por su interés histórico, y de las *Damas áureas*, por su especial vinculación, más sentimental que matemática, con el tema que nos ocupa.

Pentalfa es un rompecabezas de alineamiento para un solo jugador con el objetivo final de colocar nueve fichas en los vértices del pentagrama, tanto en las puntas de la estrella como las intersecciones interiores que forman un pequeño pentágono. Los vértices son diez, por lo que siempre quedará uno libre. Las fichas se van colocando en una secuencia de tres pasos, a saber: se pone la ficha en cualquier vértice libre y se cuenta «uno»; se mueve a un segundo vértice en línea (ocupado o vacío, no importa) y se cuenta «dos»; se mueve a un tercer vértice en línea (ahora sí, libre) y se cuenta «tres». Así, se van colocando todas las fichas. A medida que el tablero se va llenando, la tarea se dificulta.

En las *Damas áureas* también se usan nueve fichas, que se colocan libremente en los vértices del tablero, quedando uno libre. Cada jugador mueve alternativamente, comiendo fichas como en las damas, es decir, saltando por encima de una ficha si a continuación hay un espacio libre. El objetivo es dejar una sola ficha.

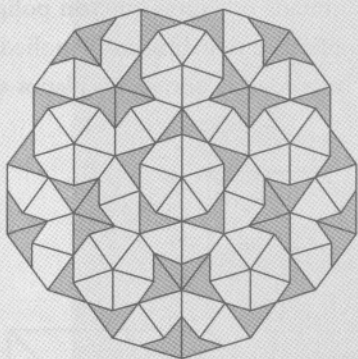


tos. Se utilizaba ya con ese propósito en Egipto y es una de las formas de tablero más antiguas que se conocen. En el templo egipcio de Kurna se han encontrado inscripciones de un juego con un tablero en forma de estrella pentagonal, datado aproximadamente en el 1700 a.C. Se trata del Pentalfa, un juego que aún se practica en Creta.

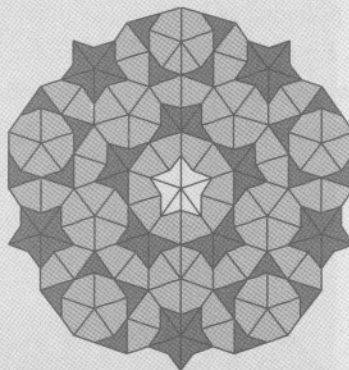
Por su interés matemático, vamos a detenernos en una variante del clásico juego de Nim que utiliza el número áureo a través de la sucesión de Fibonacci, por lo que se le denomina el «Nim de Fibonacci». Comenzamos con N fichas. El juego consiste en ir las retirando en los turnos alternativos de cada jugador y gana el que las retira todas. Naturalmente, en la primera jugada no se pueden retirar

MOSAICOS CON FLECHA Y COMETA

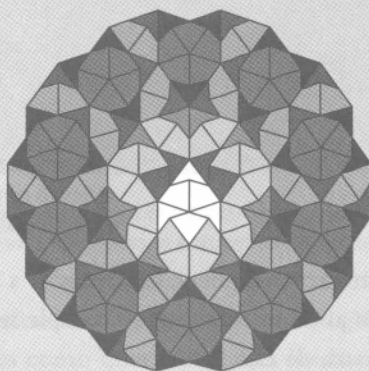
Hay muchos ejemplos de mosaicos no periódicos que se pueden formar con Flecha y Cometa, los dos ladrillos de Penrose. A continuación, mostramos algunos.



Mosaico Sol



Mosaico Estrella



Mosaico Rueda de Carro

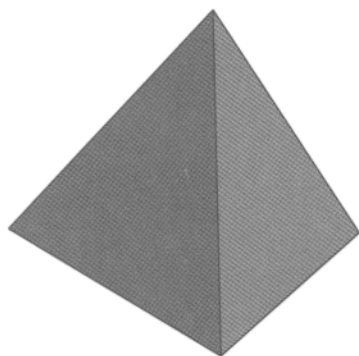
todas las fichas, pero sí en las sucesivas, siempre que se respeten las siguientes reglas de juego:

- en cada jugada hay que retirar al menos una ficha;
- no se pueden retirar más del doble del número de fichas que quitó nuestro adversario en la jugada anterior (si retiramos 4 fichas en una jugada, nuestro contrincante podrá retirar un máximo de 8 en su turno).

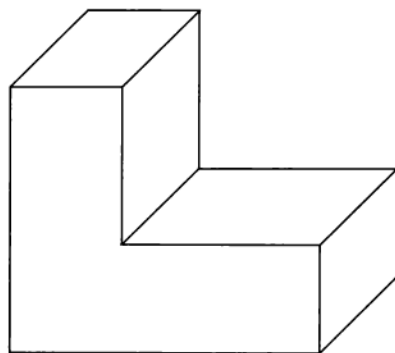
La gracia matemática del juego está en que, si N es un número de la sucesión de Fibonacci, el segundo jugador tiene estrategia ganadora (posibilidad de ganar siempre), mientras que si N es cualquier otro número, ganará el jugador que empiece la partida. Queda por saber que es lo que tienen que hacer los jugadores.

Los poliedros y el número áureo

Un poliedro es una figura sólida en el espacio, limitada por caras que son polígonos. En general, se suele entender de manera implícita que hablamos de poliedros convexos, aquellos que quedan totalmente a un lado de cada uno de los planos que limitan la región.



Poliedro convexo

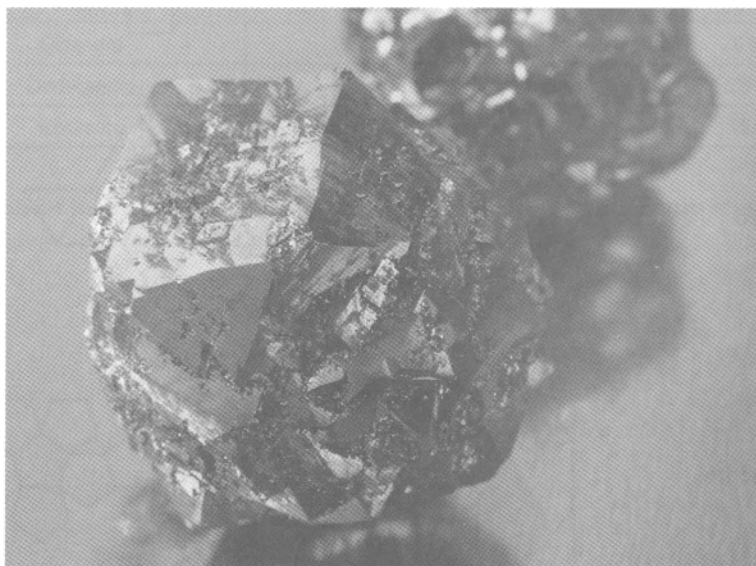
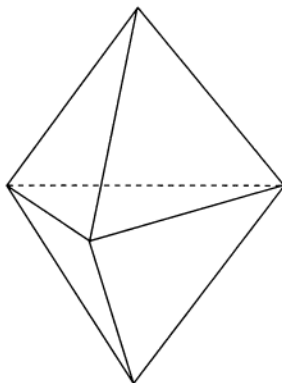


Poliedro cóncavo (los dos «palos» de la L quedan en planos distintos).

Si en un poliedro convexo cualquiera, llamamos C a su número de caras, A a su número de aristas y V al de sus vértices, se cumple siempre una relación que conocemos como el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2.$$

Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se cortan el mismo número de aristas. Si no se cumple la segunda condición, tendríamos un poliedro regular con vértices de 3 y 4 aristas, como en este caso:

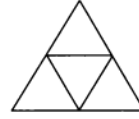
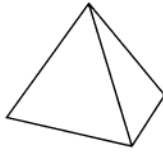


*A menudo, los cristales de pirita adoptan formas dodecaédricas perfectas.
De nuevo vemos cómo en la naturaleza se encuentran los poliedros regulares con frecuencia.*

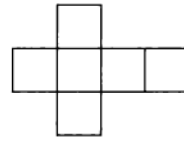
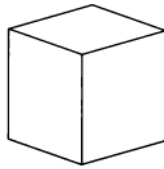
Aunque ^{se}sigue resultando sorprendente, ya los griegos sabían que hay tantos polígonos regulares como queramos (pues los hay con cualquier número de lados), pero poliedros regulares sólo hay cinco, los llamados sólidos platónicos. Tres de ellos tienen caras que son triángulos equiláteros: el tetraedro (cuatro

caras), el octaedro (ocho caras) y el icosaedro (veinte caras). Uno tiene seis caras cuadradas, el cubo, y el último tiene doce caras que son pentágonos regulares, el dodecaedro. Todos pueden inscribirse en una esfera, en la que tocan todos los vértices.

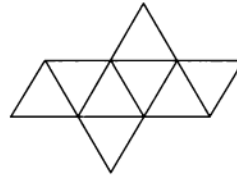
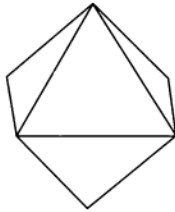
Tetraedro



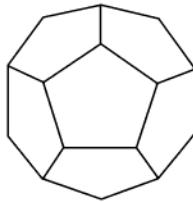
Cubo



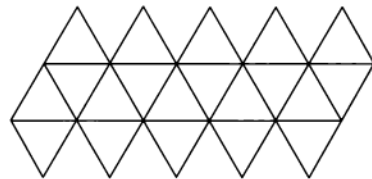
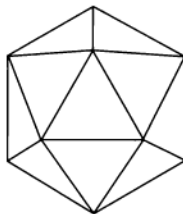
Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro



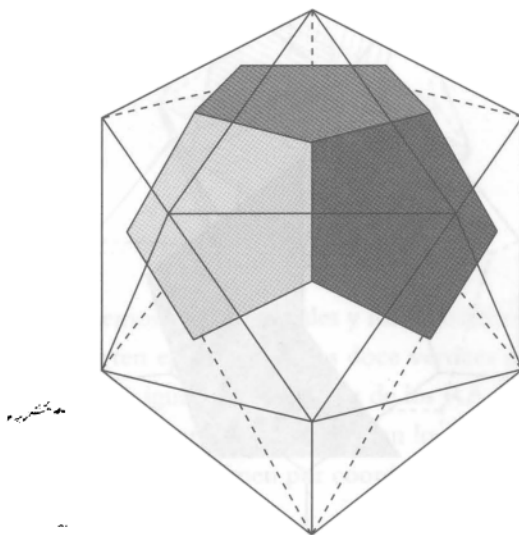
En la Grecia clásica se asociaba cada uno de estos cuerpos a uno de los elementos de la naturaleza. El cubo representaba la tierra; el tetraedro, el fuego; el octaedro, el aire; el icosaedro, el agua, y el dodecaedro era el símbolo del cosmos, el universo en su totalidad, como dijo Platón: «La divinidad [lo] utilizó para tejer las constelaciones por todo el cielo».

La gran atracción de los antiguos griegos, sobre todo de los pitagóricos, por los poliedros surgió de la contemplación de minerales cristalizados muy frecuentes en la Magna Grecia, el sur de la actual Italia, como los espectaculares cristales de pirita en forma de dodecaedro.

Vemos las caras, aristas y vértices de los poliedros regulares en la tabla siguiente:

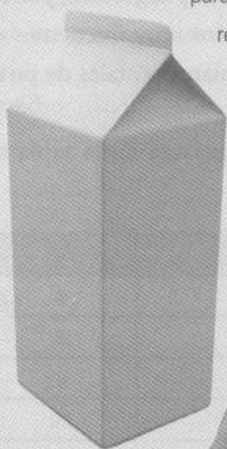
	C	A	V
Tetraedro	4	6	4
Cubo	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12

Si unimos los centros de las caras de un dodecaedro, se obtiene un icosaedro.



ENVASES POLIÉDRICOS

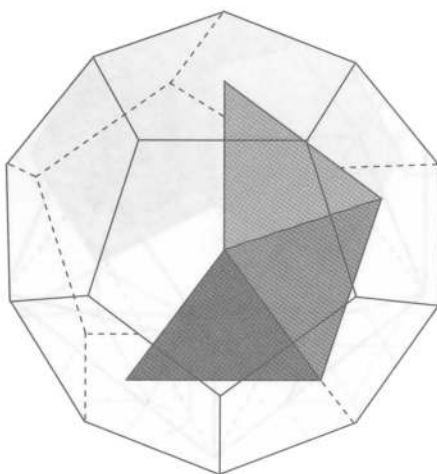
Las neveras de todos los hogares del mundo están llenas de poliedros. El envase más frecuente para líquidos (leche, zumos, tomate frito, nata...) es el conocido como tetrabrik. Este nombre comercial parece sugerir que su forma es un tetraedro, aunque en realidad es un ortoedro o paralelepípedo. La explicación está en que, en sus orígenes, el envase tenía realmente forma de tetraedro.



El tetraedro es muy fácil y rápido de construir, pues sólo precisa de uniones a lo largo de dos aristas. Pero entonces, ¿por qué fue descartado como forma ideal para envasar? Por cuestiones logísticas. El almacenaje de los tetraedros es complicado y siempre deja huecos libres; el tetraedro no compacta el espacio. No obstante, los envases tetraédricos siguen usándose en muchos países del Tercer Mundo.

La forma actual de los tetrabrics es también una sencilla solución para construir un ortoedro, que puede estudiarse a simple vista desmontando uno de aquéllos. La propiedad de los tetrabricks ortoédricos de poderse almacenar sin dejar huecos fue definitiva para encumbrar este formato.

Si hacemos lo mismo en un icosaedro, resulta un dodecaedro. Por esta propiedad, ambos se llaman poliedros duales.



No todos los poliedros tienen la misma relación con Φ . Los que tienen más cercanía con el número áureo, como era de esperar, son el dodecaedro (porque está formado por pentágonos) y su dual, el icosaedro. El número Φ se manifiesta en las expresiones que nos dan el volumen y el área (la suma de la superficie de sus caras) de ambos poliedros. Para una arista de longitud unidad, son

$$\text{Área dodecaedro} = \frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cong 20.65$$

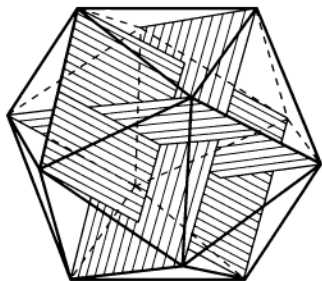
$$\text{Volumen dodecaedro} = \frac{5\Phi^2}{6-2\Phi} = \frac{1}{4}(15+7\sqrt{5}) \cong 7.66$$

$$\text{Volumen icosaedro} = \frac{5\Phi^2}{6} = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5}) \cong 2.18$$

Si tenemos un icosaedro y un dodecaedro uno dentro del otro, como sólidos duales, la relación entre sus aristas viene dada por

$$\frac{\Phi^2}{\sqrt{5}}.$$

Por otro lado, los doce vértices del icosaedro pueden dividirse en tres grupos de cuatro, cada uno de los cuales son los vértices de sendos rectángulos áureos perpendiculares entre sí que se cortan en el centro del poliedro.



Por lo tanto, si tenemos tres RA iguales y los colocamos perpendiculares entre sí de forma que se corten en su centro, los doce vértices que sobresalen serán los de un icosaedro de arista igual al lado menor de los RA. Es decir, tomando como origen de coordenadas el punto en que se cortan los tres RA, los doce vértices de un icosaedro de vértice unidad tienen por coordenadas

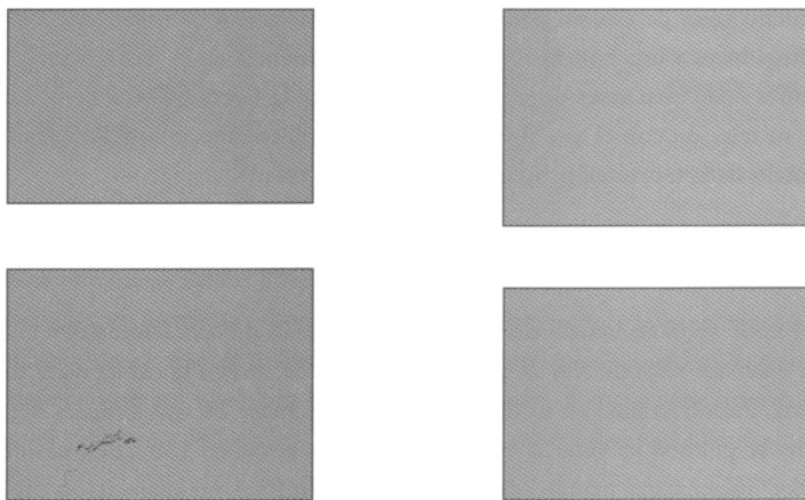
$$(0, \pm 1, \pm \Phi), (\pm 1, \pm \Phi, 0), (\pm \Phi, 0, \pm 1).$$

Belleza y perfección en el arte

En 1876 el alemán Gustav Theodor Fechner (1801-1887), el inventor de la psicología física, hizo un estudio estadístico con personas sin experiencia artística, a las que pidió que escogieran el rectángulo que les agradase más entre varios, incluyendo el cuadrado. El rectángulo áureo y otras variantes muy próximas resultaron elegidas por una destacada mayoría.

Es muy sencillo reproducir la prueba de Fechner. Únicamente se debe seleccionar una serie representativa de personas y presentar ante ellas rectángulos de distintos tipos. La simple pregunta sobre cuál les gusta más, arroja un resultado sorprendente. Pero, como saben los especialistas, el evaluador también debe ser evaluado. Observe las figuras de esta página: ¿cuál es el rectángulo que más le gusta?

Fechner también realizó meticulosos estudios estadísticos sobre las proporciones en el cuerpo humano, y concluyó que «para que un objeto sea considerado bello



*Éstos son algunos de los rectángulos del test de Fechner. ¿Cuál le gusta más?
En la página siguiente figura la proporción que posee cada uno de ellos.*



Rectángulo de 16/9,
como los nuevos televisores.



Rectángulo de 36/24, como las fotos.



Rectángulo de $\sqrt{2}$, como las hojas DIN A.



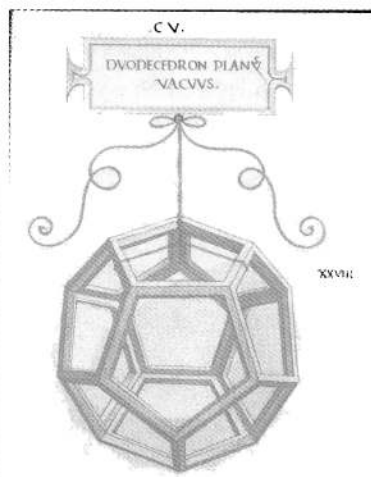
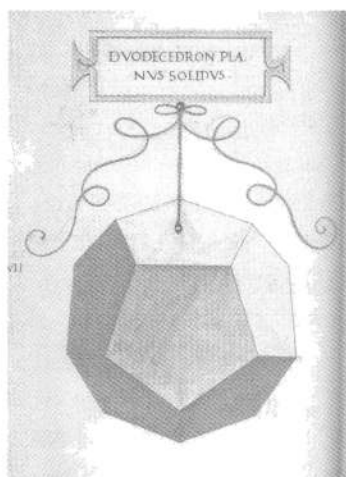
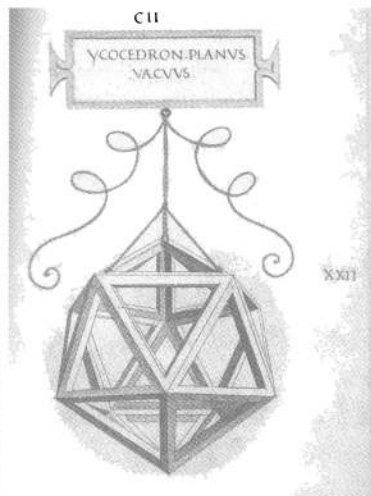
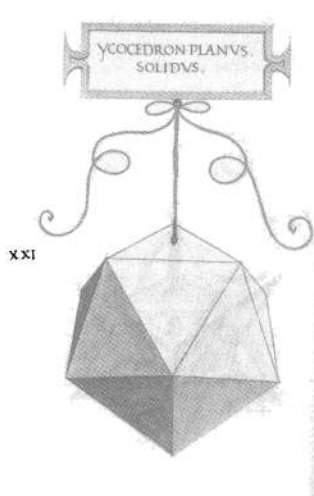
Rectángulo Φ , el rectángulo áureo.

desde el punto de vista de la forma debe haber entre la parte menor y la mayor la misma relación que entre la mayor y el todo». Ésta es la descripción de la relación áurea. La ciencia, al fin, parecía dar crédito a la idea de que la divina proporción poseía una armonía y una belleza intrínsecas.

Mucho antes de eso, sin embargo, artistas y arquitectos de todas las épocas habían llegado ya a una conclusión parecida. La influencia de la sección áurea y sus diferentes manifestaciones puede encontrarse ya en la Grecia clásica, pero la historia de su relación con el arte debería arrancar, posiblemente, con el Renacimiento y el inicio de la teorización rigurosa sobre el acto creativo.

La divina proporción de Luca Pacioli

Luca Pacioli vivió en la Italia del siglo xv y comienzos del xvi. Fueron él y Leonardo da Vinci los responsables de poner el número de oro en la órbita de la belleza y el arte. Pacioli lo hizo en su libro *De divina proportione*, escrito a finales de 1498. La obra se publicó en Venecia bastantes años más tarde, en 1509, después de que su autor realizara tres manuscritos. Hasta la versión final, no aparecieron capítulos fundamentales para nuestra pequeña historia, como el *Tractato de la architectura*, inspirado por el arquitecto romano Vitruvio.



Ilustraciones de Leonardo de los poliedros siguientes (de arriba abajo y de izquierda a derecha): icosaedro sólido, icosaedro hueco, dodecaedro sólido y dodecaedro hueco.

De divina proportione fija las proporciones que deben cumplirse para conseguir la belleza excelsa, en forma de reflexión sobre la geometría. En la obra aparecen los famosos dibujos de los sesenta poliedros de mano del maestro Leonardo y también su celeberrimo «hombre ideal», en base a Φ , que ha sido objeto de innumerables revisitaciones a lo largo de los años. De este modo, contiene los ingredientes imprescindibles de las obras teóricas de más influencia en la cultura occidental: un momento, el Renacimiento; un lugar, Italia; y los protagonistas fundamentales, los artistas, arquitectos, matemáticos y filósofos que han escrito las páginas de la historia y del arte europeo.

LUCA PACIOLI (1445-1517)

El polifacético Luca Pacioli nació en 1445 en Borgo de Sansepolcro, la tierra del pintor Piero della Francesca (1412-1492), de quien recibió las primeras lecciones artísticas y matemáticas. Vivió y estudió en Venecia, pero después –invitado por el arquitecto Leon Battista Alberti (1404-1472)– se trasladó a Roma, donde tomó el hábito franciscano. Trabajó como profesor de matemáticas en diferentes universidades hasta incorporarse a la corte de Ludovico Sforza, *Il Moro*, en Milán. Fue allí donde tuvo lugar un feliz encuentro para la historia: Pacioli conoció a Leonardo da Vinci. Tras la ocupación de Milán por los franceses, viajó por las más importantes universidades italianas: Pisa, Roma y Bolonia, donde coincidió con Scipione del Ferro (1465-1526), el conocido algebrista italiano que colaboró en la resolución por radicales de la ecuación general de tercer grado con una incógnita. Luca Pacioli murió en su ciudad natal en 1517.

La influencia de su trabajo no se reduce a *De divina proportione*. Las muestras de su genialidad comienzan en la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*, una obra enciclopédica de más de 600 páginas, impresa en Venecia en 1494. Ya en ella hace referencia a la necesidad de las proporciones en la arquitectura cuando afirma que «los oficios divinos tienen poco valor si la iglesia no ha sido construida con la debida proporción».

Se conserva un retrato de Luca Pacioli de 1495, atribuido a Jacopo de Barbieri y conservado en el Museo de Capodimonte de Nápoles. El matemático aparece en él con hábito franciscano, enseñando geometría euclídea (para eliminar toda duda sobre sus fuentes) a un joven noble (el duque de Urbino). Maestro y alumno están rodeados de poliedros y útiles



geométricos. A la izquierda, pende un poliedro de los llamados *arquimedianos*, cuyas caras son polígonos regulares de la misma arista, pero no iguales. Muchos de esos poliedros aparecen dibujados por Leonardo en *De divina proportione*.

Retrato de Luca Pacioli, atribuido a Jacopo de Barbieri.

Leonardo: la perfección áurea

Leonardo da Vinci (1452-1519) es uno de los máximos ejemplos en la historia de la idea del genio. Sus aportaciones no se limitan a unos pocos campos del conocimiento humano, sino que abarcan áreas muy alejadas entre sí: matemáticas, física y química, ingeniería, tecnología, pintura, arquitectura, etc. La maravilla de Leonardo es que fue excelente en todo lo que hizo. Más tarde o más temprano, sus aportaciones acabaron teniendo relevancia en todos los campos que cultivó. Es el prototipo del hombre del Renacimiento, que tiene intereses muy diversos y es competente en todos.

La atracción que ha despertado el personaje a lo largo del tiempo en todo el mundo se explica por su estatura intelectual, pero también por muchos de sus rasgos personales, que construyeron el arquetipo del genio que rebasa su tiempo. Para

UN GENIO DE LEYENDA

Leonardo nació en Vinci, una población cercana a Florencia, en 1452. Era hijo ilegítimo de un notario, pero éste lo crió como al resto de sus hijos. Permaneció en la casa paterna de Florencia hasta ingresar como aprendiz en el taller del pintor Andrea del Verrocchio. En 1472 fue inscrito como maestro pintor. Su primer encargo fue una tabla para el Palazzo Pubblico que nunca finalizó (la acabó Filippino Lippi). Su relación con los Médici, señores de la ciudad, fue tempestuosa, y en 1486 se trasladó a Milán, bajo el gobierno del duque Ludovico Sforza, que intentaba que su ciudad tuviera la misma importancia cultural que Florencia. A su servicio, Leonardo pintó la *Virgen de las rocas* y el fresco de *La última cena* para el convento de Santa María de las Gracias.

A la caída de Ludovico Sforza en 1500, el maestro vivió en Bérgamo, Mantua y Venecia, pero acabó volviendo a Florencia. Allí, en 1505, pintó su retrato más conocido, la *Gioconda* o *Mona Lisa*, un cuadro lleno de misterio, ya que se desconoce la identidad de la dama retratada, qué significa su misterioso gesto y en qué estancia se encuentra mientras es pintada.

En 1513 Leonardo se trasladó a Roma. Trabajó para el Papa León X hasta la muerte de éste, en 1517. Sólo entonces aceptó la invitación del rey Francisco I de trasladarse a Francia. Murió allí en 1519, en el castillo de Clos-Lucé, asistido por el propio rey de Francia, si queremos creer la leyenda.



Autorretrato de Leonardo da Vinci, pintado en su vejez, hacia 1513.



Frontispicio del Tratado de la pintura de Leonardo en el que se estudia la relación entre esta disciplina artística y las matemáticas.

empezar, su personalidad no era nada común, y mucho menos en su época. Vegetariano, zurdo, se dice que homosexual, estaba tan absorbido por la idea del progreso irrefrenable que no tenía prejuicios a la hora de bordear o incluso traspasar la legalidad en sus experimentos. A su leyenda contribuye su tendencia al hermetismo, pues escribía de manera criptográfica, con la imagen especular de las letras; y su producción artística, escasa pero enormemente enigmática, como la famosísima *Gioconda*, de la que tantas cosas faltan por conocer con certeza.

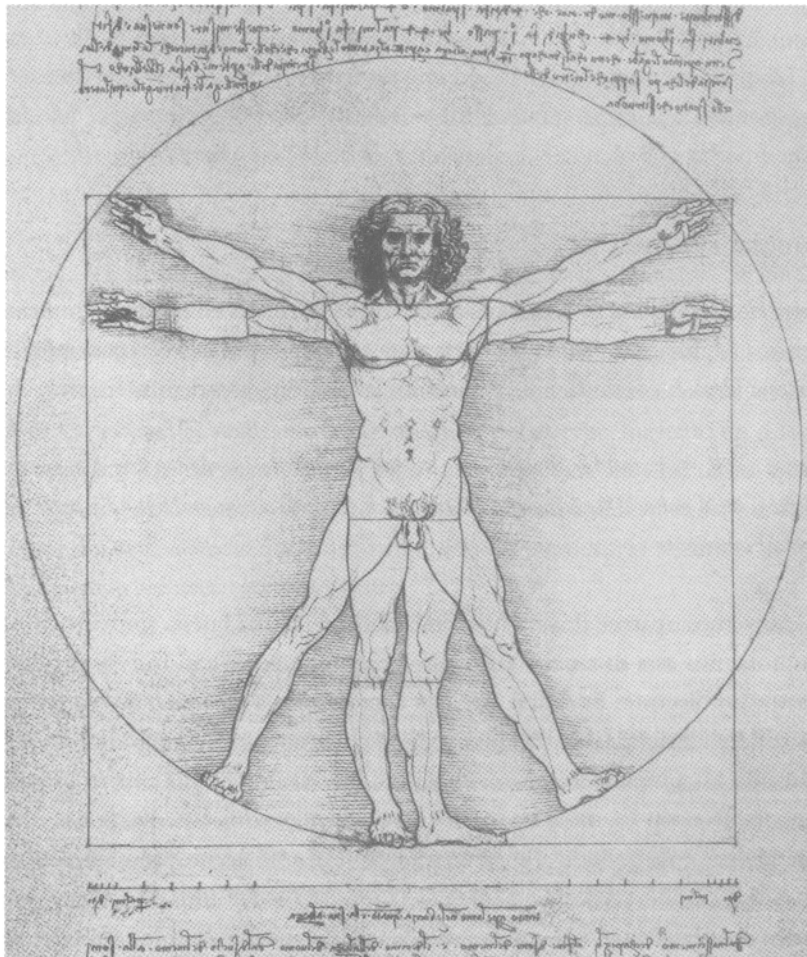
Los dibujos y manuscritos de Leonardo se reúnen en diez códices conservados en distintos museos europeos. Uno está en la colección particular del magnate estadounidense Bill Gates, que pagó por él varios millones de dólares. Si escribimos el nombre de Leonardo da Vinci en cualquier buscador de

Internet, encontraremos más de 12.400.000 páginas relacionadas con él.

Leonardo fue un teórico del arte de la pintura, y un firme defensor de su imbricación con las matemáticas. Su obra *Tratado de la pintura* comienza con la frase: «Nadie lea mis obras que no sea matemático». La obra fue manuscrita hacia 1498, pero no se publicó hasta mediado el siglo siguiente.

Leonardo sólo hizo una labor de ilustrador en *De divina proportione*, pero el propio Pacioli habla en su obra de la importancia de los estudios matemáticos del genio en el terreno artístico. El autor dice: «Las pirámides de este libro, como las demás figuras, son también de la mano de mi compatriota anteriormente nombrado, Leonardo da Vinci de Florencia, al que jamás hombre alguno se ha siquiera aproximado en la ciencia del dibujo». Esas figuras, junto con *El hombre ideal*, son hoy en día verdaderos iconos de un estado del pensamiento que reúne sensibilidad artística y científica, el ideal humanístico. A menudo, en diferentes momentos de la historia, cuando aparece alguna persona que es un fenómeno físico en cualquier disciplina, se la compara con el modelo de Leonardo en *De divina proportione*.

Leonardo aplicó el conocimiento científico de las proporciones humanas a los estudios de Pacioli y Vitruvio acerca de la belleza. Siguiendo el ideal renacentista, *El hombre ideal* o *El hombre de Vitruvio*, pone al hombre en el centro del universo, puesto que está inscrito en un círculo y un cuadrado. La figura sigue las recomendaciones del romano Vitruvio (Marcus Vitruvius Pollio), el arquitecto de Julio César, que vivió en el siglo I a.C. El arquitecto, ingeniero y tratadista romano volvió a estar de actualidad en el Renacimiento, con la traducción y publicación en 1486 de toda su obra escrita. En los decenios siguientes, las obras de Vitruvio tuvieron



El hombre ideal, o El hombre de Vitruvio, actualmente conservado en la Real Academia de Venecia, muestra las proporciones ideales del cuerpo humano relacionándolo con la geometría e inserto en un cuadrado y un círculo. La razón entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es áurea.

múltiples ediciones en todas las ciudades italianas de relevancia. La arquitectura renacentista las tomó como base para sus teorías, y Leonardo confesó a menudo que el romano era su gran inspiración.

Vitruvio da referencias sobre la figura humana basadas en razones simples. Dice que la altura es igual a la envergadura, y que un hombre tumbado, al extender brazos y piernas, describe un círculo. Muchos artistas intentaron recoger en una misma ilustración esas tres formas: la figura humana, la cuadrada y la circular, no siempre con resultados afortunados. Leonardo encontró una solución original y elegante, basada en que el cuadrado y la circunferencia tienen centros diferentes. Los genitales son el centro del cuadrado, y el ombligo es el centro de la circunferencia. Las proporciones ideales del cuerpo humano que se desprenden de esa figura corresponden a la razón áurea entre el lado del cuadrado y el radio del círculo. Así, la geometría une técnica y belleza a través de la razón áurea.

Las medidas ideales

El hombre ideal representa las relaciones aproximadas normales en el cuerpo humano de una persona adulta, usadas desde la Grecia clásica como canon artístico para representar a la persona ideal. A continuación, exponemos las proporciones de manera clara:

Altura total = brazada (distancia entre las puntas de los dedos con los brazos abiertos) = 8 palmos = 6 pies = 8 caras = $1,618 \times$ altura ombligo (distancia del suelo al ombligo).

Como vemos, aparece finalmente la relación 1,618, una buena aproximación a Φ . Si comprobamos esas distancias en nuestro propio cuerpo, con toda seguridad nos llevaremos un disgusto. Es difícil que nos acerquemos a ellas; son las proporciones de una belleza idealizada. Hay otra manera de comprender el canon ideal de belleza: la estadística. Si comparamos las mediciones individuales de una muestra significativa de personas con las medidas ideales veremos que, como media, nos acercamos bastante al canon de belleza: el ser humano es ideal sólo como promedio. El matemático belga Lambert Adolphe Quételet (1796-1874) fue uno de los padres de la estadística moderna; en 1871 sus estudios estadísticos sobre las proporciones de los hombres europeos confirmaron por completo las relaciones ideales.

A partir de aquí se plantean preguntas interesantes. ¿A qué proporciones responden los cánones de belleza de otras civilizaciones, como la hindú o la china,

A ESCALA HUMANA

Aunque ahora son de uso tan común que parece imposible que alguna vez el mundo haya sido de otra manera, la humanidad no siempre ha utilizado los metros y centímetros del Sistema Métrico Decimal.

A lo largo de los siglos pareció mucho más natural utilizar medidas de longitud que tenían que ver con el cuerpo humano: pies, palmos, dedos, pulgadas, etc. Como es lógico, la cantidad que representaban estaba extraída de la parte del cuerpo real. Una pulgada era muy poco, y desde luego, mucho menos que un palmo.

Pero no todas las personas tienen el mismo número de pie; por lo tanto, ¿de dónde salía el patrón del «pie universal»? El patrón-medida se extraía de las que tenía o había tenido algún personaje destacado. Por ejemplo, la yarda, unidad de medida de longitud que todavía se utiliza en los países sajones, fue definida por el rey Enrique I de Inglaterra en el siglo XII como la distancia entre la punta de su nariz y su dedo pulgar cuando extendía el brazo. A partir de ella, definió el pie como la tercera parte de esa longitud.

cuyas diferencias físicas respecto a los rasgos europeos se revelan a primera vista? Seguro que la belleza es igual de ideal en las diferentes culturas, pero, ¿es la misma idea? Las encuestas realizadas sobre medidas del cuerpo humano en diferentes países y culturas han demostrado que todos somos iguales. En otro orden de cosas, y sólo para acabar de cerrar el círculo, existen estudios del mismo tipo sobre la enseñanza en matemáticas que confirman que las estructuras mentales tampoco cambian al pasar de un continente a otro.

El número de oro en la pintura

En el Renacimiento, el desarrollo de la perspectiva y la búsqueda de las proporciones ideales para la belleza hicieron coincidir en el tiempo y en la dedicación a artistas y científicos. El momento de la codificación de la perspectiva es también el comienzo de la geometría proyectiva, que los propios pintores renacentistas fundamentaron, al lograr plasmar de manera realista los objetos tridimensionales en sus cuadros, es decir, en dos dimensiones. Leonardo da Vinci jugó un papel fundamental en estos logros, pero también lo harían Rafael o Durero.

En 1435 apareció la obra fundamental de la perspectiva, el *Tratado de la pintura*, de Leon Battista Alberti, en el que se explicaban los métodos para conseguir repre-

LEON BATTISTA ALBERTI (1404-1472)

Alberti nació en Génova en 1404, cuando Brunelleschi estaba en pleno apogeo. Era hijo natural de un rico comerciante y banquero florentino, desterrado de la Toscana por motivos políticos.

Fue un excelente ejemplo de hombre del Renacimiento: se dedicó principalmente a la arquitectura, las matemáticas y la poesía, pero también cultivó la lingüística, la filosofía, la música e incluso la arqueología. Alberti integró la segunda generación de artistas renacentistas y se convirtió en su figura más emblemática. En su opinión, «el artista en este contexto social no debe ser un simple artesano, sino un intelectual preparado en todas las disciplinas y todos los terrenos». Trabajó como arquitecto para el célebre comerciante y humanista Giovanni di Paolo Rucellai, para quien realizó la fachada de Santa Maria Novella, resuelta en base a la proporción áurea. Sus trabajos se encuentran entre las mayores obras de la historia de la arquitectura: el Palacio Rucellai, la Villa Médicis, etc.

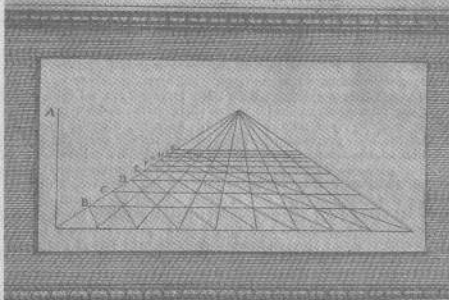
Cuando Alberti murió en Roma en 1472 tras una vida intensa, dejó obras inolvidables y las teorías más influyentes. En el momento de su muerte, su relevo ya estaba preparado. El joven Leonardo da Vinci tenía veinte años.



En su célebre fresco de la Capilla Brancacci, Masaccio pintó (de izquierda a derecha) a Masolino, su autoretrato (mirando hacia nosotros), Leon Battista Alberti y Brunelleschi (ilustración superior). Junto a estas líneas, una página perteneciente al libro primero del Tratado de la pintura de Leon Battista Alberti (edición realizada en 1733 con grabados de Francesco Sestini).

... delle divisioni della linea che piace. Ma nelle quattro da traverso dell'ordine. Io ho uno spazio piccolo, nel quale io tiro una linea di la divido in quelle parti, che è divisa la linea che piace del quadrato. Il pongo su alto un punto sopra quella linea, tanto alto quanto è l'altezza del centro del quadrato dalla linea giacente diviso, e tiro di punto a punto la divisione della linea, e le loro linee. Dopo determino l'altezza io voglio che fra infra l'occhio di chi riguarda, e la pittura, e auto il luogo del taplo con una linea retta a piombo. Io li tagliamo le linee che ella tova. Linea a piombo è quella che caderà sopra la linea diritta: caderà da ogni banda gli angoli a quadrato.

Punto del centro alle tre braccia.



Linea giacente di non boccia.

Punto della veduta: alto tre braccia B.C.D.E.F.G.H.I.K.K. linee para questa linea a piombo mi darà con le sue intersecciones adunque tutti delle distanze che avranno ad essere infra le linee a traverso parallele mente, nel qual modo io avrò disegnato nel pavimento tutte le parti quali, quando elle sieno tirate a ragione, ce ne darà indizio; le uno o continuata linea dritta farà nel dipinto pavimento diametro del qual congiunti insieme. Ed è appreso a matematice il disegno di un quadrato quella linea dritta che partendosi da uno degli angoli, va all'altro, e la male divide il quadrato in due parti, talmente che facci di triangolo due triangoli. Dato adunque diligentemente fare a quelle col di nuovo di sopra un'altra linea a traverso, ugualmente lontana dalle

sentar la realidad. En ella aparecieron ideas que lo cambiaron todo y que se convirtieron en las nuevas reglas, como las expresadas en las famosas frases «el primer requisito para un pintor es conocer la geometría» y «el cuadro es la ventana abierta a través de la que se ve el objeto pintado».

La obsesión de Alberti era la búsqueda de reglas teóricas y prácticas para guiar el trabajo de los artistas, por lo que sus obras están repletas de numerosos cánones. En *De statuta* expone las proporciones del cuerpo humano, en *De pictura* realiza la primera definición de la perspectiva científica y en *De re aedificatoria* describe su concepto de la arquitectura moderna, completamente imbuido de la proporción áurea. Lo revolucionario de sus propuestas es una constante del conocimiento humano: la mezcla entre lo antiguo y lo moderno, que, en el periodo renacentista había comenzado ya Filippo Brunelleschi.

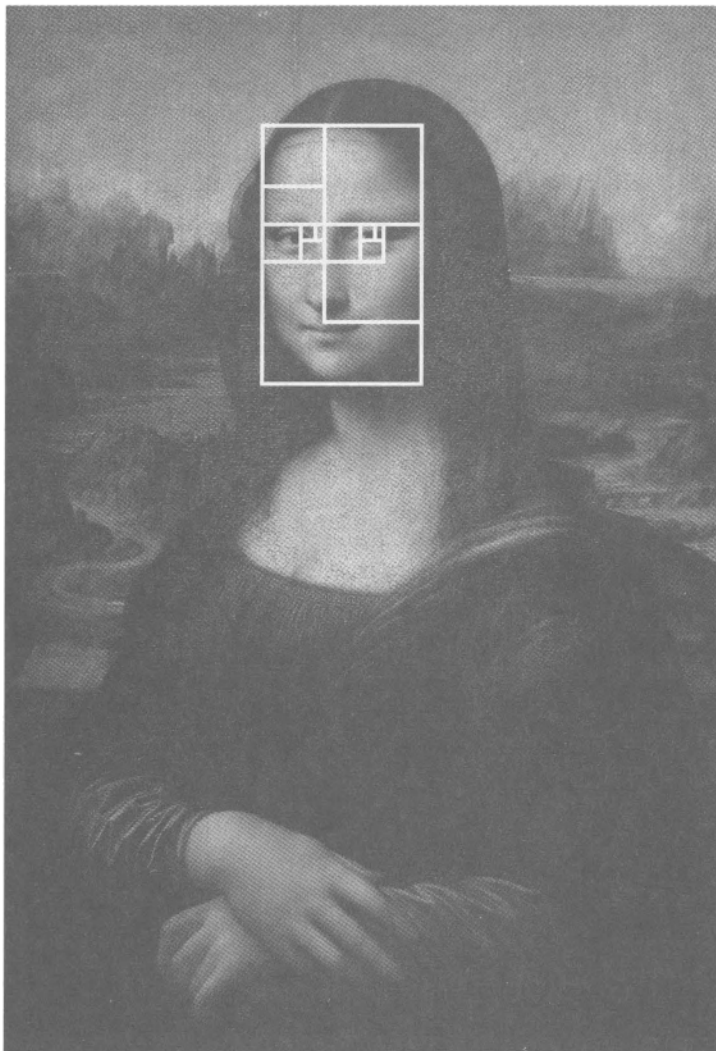
Leonardo da Vinci continuó el estudio de la perspectiva, en pleno auge y desarrollo formal y teórico en su época. El genio afirmó que «la perspectiva es la rienda y el timón de la pintura». Su influencia es claramente identificable en muchos de los artistas que le sucedieron, en particular Alberto Durero, quien estuvo igualmente interesado en la investigación de los fundamentos científicos de la pintura. Aunque no se dispone de testimonio directo del uso de la proporción áurea por parte de Leonardo, la composición de obras como *La última cena* se solapa de forma asombrosa con diversas figuras áureas; en especial, el rectángulo.



Los elementos de la composición de *La última cena* de Leonardo tienen proporciones áureas.

En esta obra el rectángulo áureo define tanto las dimensiones de la mesa como la disposición a su alrededor de Cristo y sus discípulos. Con el conocimiento que ya tenemos de la proporción áurea, podemos constatar a simple vista que también la siguen las paredes de la estancia y las ventanas del fondo.

Tampoco el retrato de la *Gioconda* está exento de la razón áurea. Diversos estudios muestran cómo el rostro de *Mona Lisa*, tanto en su conjunto como en sus detalles, se enmarca con precisión en una elegante sucesión de varios rectángulos áureos.

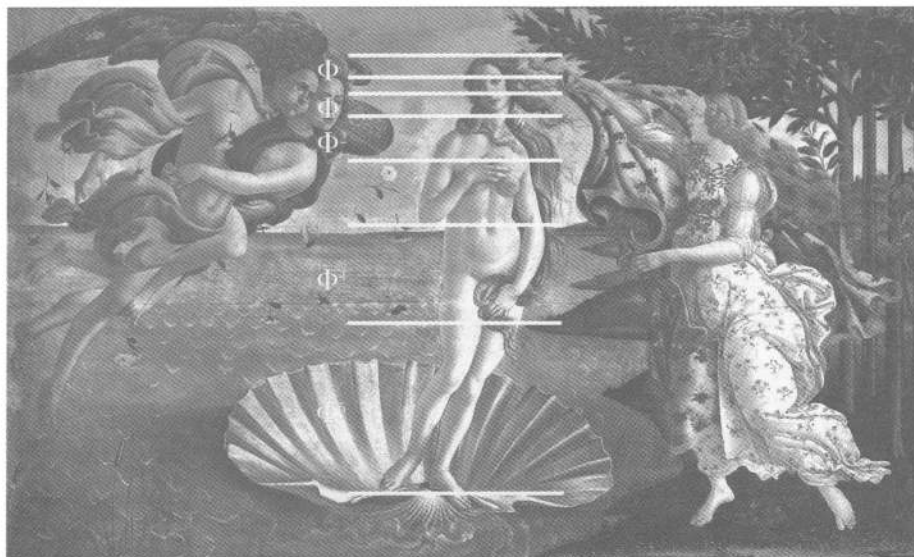


El rostro de la Gioconda está inserto en rectángulos áureos superpuestos.



La estrella pentagonal subyace claramente en la composición de La Sagrada Familia, de Miguel Ángel.

En términos generales, los pintores renacentistas influidos —siquiera inconscientemente— por la proporción áurea usaron los RA para las proporciones a todos los niveles de detalle. El símbolo pentalfa les sirvió para la distribución del espacio, rigiendo sobre todo la colocación de los personajes. Con el mismo propósito se usó también la espiral áurea. Un ejemplo de organización a través de la estrella pentagonal es *La Sagrada Familia*, de Miguel Ángel. La presencia de Φ en *La flagelación*, de Piero della Francesca, y en *El nacimiento de Venus*, de Sandro Botticelli, ofrece imágenes de una belleza estremecedora. Trazar las figuras que organizan esas obras es un delicioso desafío.

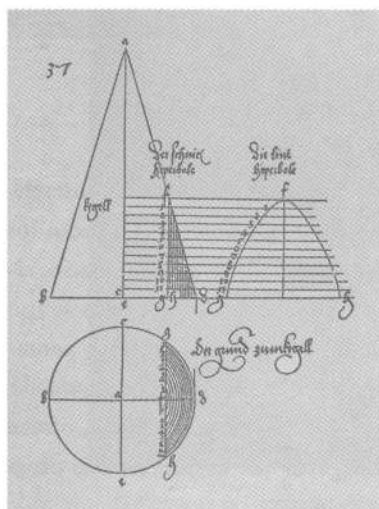


En El nacimiento de Venus, de Sandro Botticelli, el cuerpo de la diosa muestra proporciones áureas.

El más destacado continuador de la estela de Leonardo fue Alberto Durero. En 1525, Durero publicó el primer libro de matemáticas escrito en alemán: *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*, conocido popularmente de manera mucho más simple por el título *De la medida*. El pintor y matemático ofrece en él su filosofía de la belleza en la armonía de las proporciones: «La belleza consiste

en la armonía de las partes entre sí y con el todo [...] Lo mismo que cada parte en sí debe ser convenientemente dibujada, también su reunión debe crear una armonía de conjunto, [...] porque a los elementos armoniosos se les tiene por bellos».

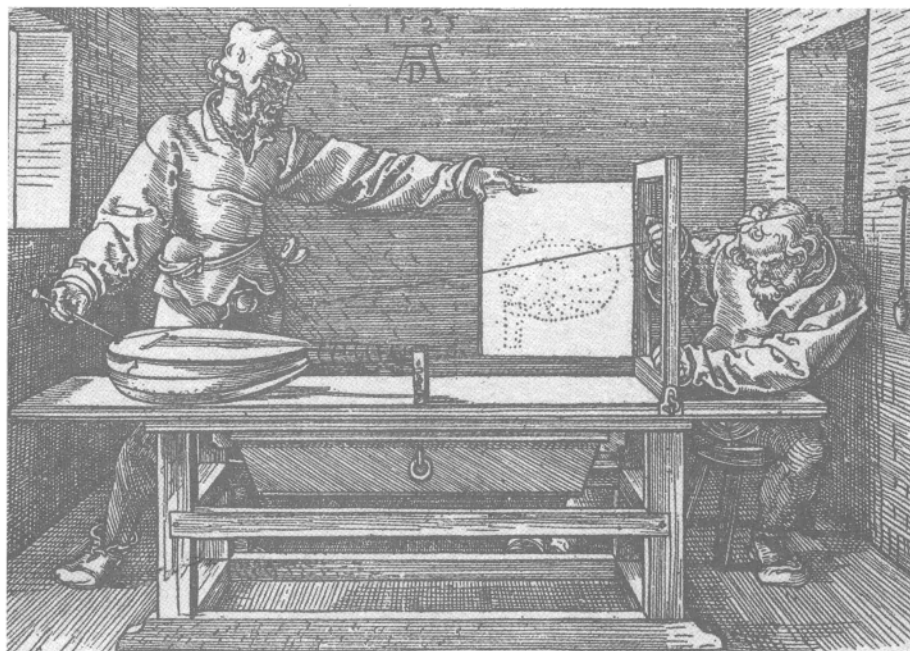
De la medida describe la construcción de un gran número de curvas, como la concoide, la espiral de Arquímedes y la espiral basada en la sección áurea, también conocida a partir de entonces como *la espiral de Durero*. El libro



Construcción de la sección cónica de la parábola, en De la medida.

ofrece métodos exactos (y otros aproximados) para construir polígonos regulares; considera las pirámides, los cilindros y otros cuerpos sólidos, y estudia los cinco sólidos platónicos, así como los sólidos semirregulares de Arquímedes. Durero tampoco olvidó la construcción de las secciones cónicas, como la parábola. En conjunto, como vemos, su obra se puede considerar como el inicio de la geometría descriptiva.

Finalmente, el libro cuenta con una introducción a la teoría de la perspectiva. Durero hizo varios grabados en los que mostraba los aparatos necesarios para aplicarla en dibujos del natural.



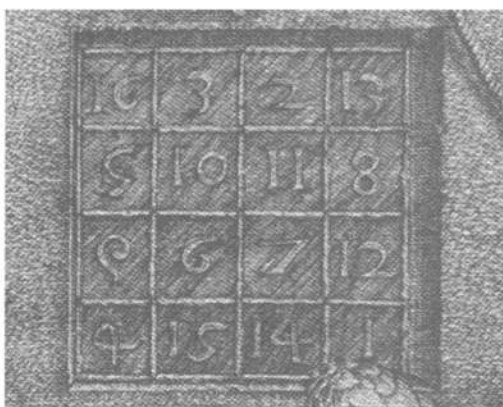
Dos grabados de Durero dedicados a los aparatos necesarios para aplicar la perspectiva en el dibujo.

ALBERTO DURERO (1471-1528)

Durero, o Dürer, es considerado como la máxima figura del Renacimiento fuera de Italia. Nació en 1471 en Núremberg, donde se formó como pintor y grabador. Acabada su instrucción, viajó por Alemania, y en 1494, visitó Venecia, lo que le dio ocasión de conocer la obra matemática de Pacioli. Al año siguiente abrió su propio taller en su ciudad natal. Además de pintura, se dedicó a estudiar a fondo matemáticas. Vivió en Italia de 1505 a 1507, más interesado en aprender sus matemáticas que su arte, del que ya era maestro consumado. Fue nombrado pintor de la corte del emperador Maximiliano I en 1512. El nuevo emperador Carlos V le renovó en el cargo en 1520. Además del tratado *De la medida* también escribió *Los cuatro libros de las proporciones del cuerpo humano*.



En cuanto a los grabados del artista, *Melancolía I* es quizás el más conocido. En él, Durero muestra su pericia al trazar distintos objetos en perspectiva, en particular lo que parece ser un romboedro, situado a la izquierda. A la derecha aparece un cuadrado mágico, un cuadrado compuesto por números donde la suma de sus filas, columnas o diagonales es constante. El cuadrado muestra dos cifras en la parte inferior de las filas centrales que datan la obra: 1514.



Melancolía I, de Durero, y detalle del cuadrado mágico en los que se puede apreciar la estrecha vinculación de la obra de Durero con sus conocimientos matemáticos.

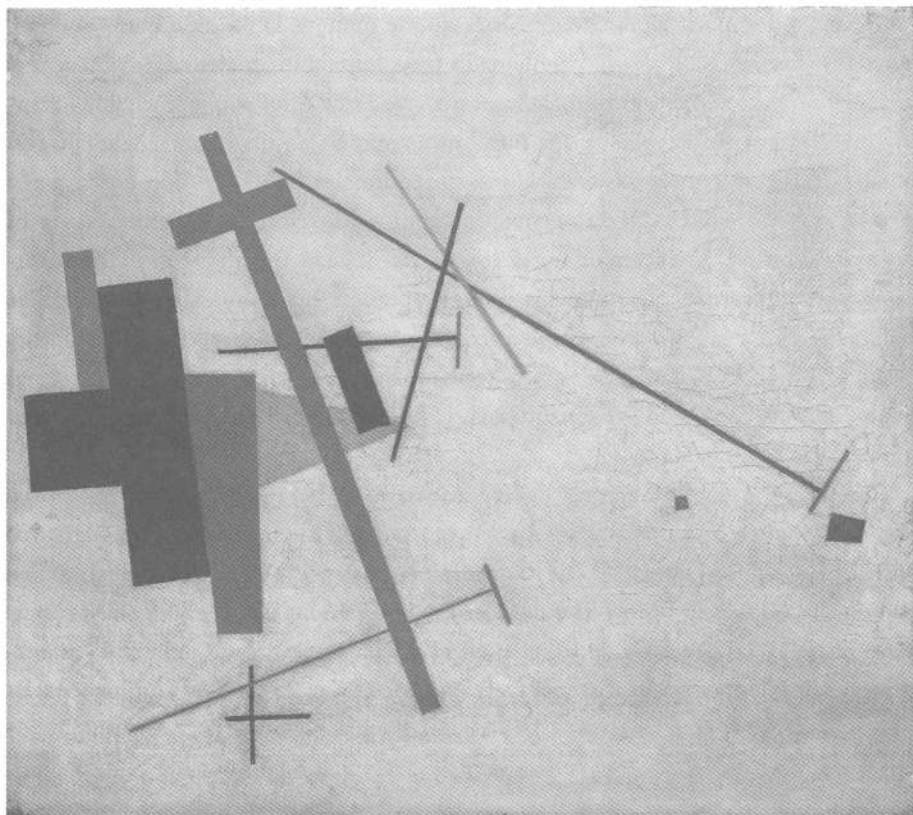
Tendrán que pasar algunos siglos para que se renueve la relación entre el arte y las matemáticas. El momento privilegiado tuvo lugar a inicios del siglo XX, con el auge del arte abstracto. Los historiadores del arte Lucy Adelman y Michael Compton, escribieron sobre ésta época que «ante todo había un interés generalizado por las geometrías no euclidianas y/o n -dimensionales... En segundo lugar, el periodo señaló la derrota de la perspectiva y su sustitución con cánones diversos menos sistemáticos. En tercer lugar, los artistas hacían uso de proporciones numéricas y de parrillas que, como las figuras geométricas, se asociaban a la idea de reducir el arte a sus elementos específicos. En cuarto lugar, aparecieron en pintura elementos que se extraían de textos de matemática... Por último, simples figuras geométricas se asociaron a las máquinas y a sus productos y de esta manera al progreso o a la modernidad».

Fue un momento de efervescencia creativa de ambas disciplinas. En 1912 tuvo lugar un acontecimiento revolucionario, como señaló el pintor y escultor suizo Max Bill: «El punto de partida de esta nueva concepción se debe probablemente a Kandinsky, que en su libro *Ueber das Geistige in der Kunst (De lo espiritual en el arte)* puso en 1912 las premisas de un arte en el que la imaginación del artista se sustituiría por la concepción matemática». Piet Mondrian expresó el cambio con las

LA CALAVERA ANAMÓRFICA

La anamorfosis es el efecto por el que los objetos representados sólo son visibles desde un determinado punto o a través de un elemento específico que modifica el punto de vista del observador, un cilindro o un cono, por ejemplo. El más célebre antecedente de anamorfosis es el cuadro *Los embajadores*, de Hans Holbein (1497-1543), en cuya parte inferior aparece una calavera deformada, que podemos ver perfectamente si miramos desde el punto adecuado.





Composición suprematista, realizada en 1915 por Kasimir Malevich. Los pintores abstractos también partían de la geometría para sus composiciones y en ellas la proporción áurea volvía a aparecer.

palabras siguientes: «El neoplasticismo tiene sus raíces en el cubismo. También se le puede llamar pintura abstracto-real, porque lo abstracto (como las ciencias matemáticas pero sin alcanzar como ellas lo absoluto) puede ser expresado por una realidad plástica en la pintura. Ésta es una composición de planos rectangulares coloreados que expresa la realidad más profunda, que llega a través de la expresión plástica de las relaciones y no a través de la apariencia natural... La nueva plástica plantea sus problemas en equilibrio estético y expresa de ese modo la nueva armonía».

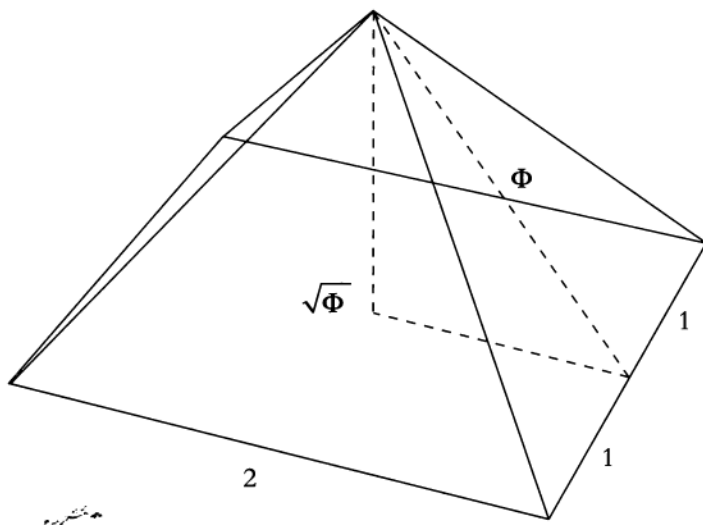
Max Bill definió esta nueva manera de entender el arte: «La concepción matemática del arte no es la matemática en el sentido estricto del término, incluso se podría decir que sería difícil para este método utilizar lo que se entiende por

matemática exacta. Es más bien una configuración de ritmos y relaciones, de leyes que tienen un origen individual, del mismo modo que la matemática tiene sus elementos innovadores originarios en el pensamiento de sus innovadores».

Muchos artistas destacados del siglo xx tienen un fuerte sabor matemático; muchas obras fundamentales tienen una concepción matemática o incluso usan las matemáticas como fuente de inspiración. No sólo destaca el omnipresente Escher, quizás el más popular, sino movimientos enteros, como el suprematismo o el cubismo. La subcorriente de este último llamada Sección Áurea se basaba en la idea de la búsqueda de formas universales. La *Sección Áurea* del cubismo estuvo liderada por Marcel Duchamp, y en ella participaron nombres tan ilustres como Le Corbusier, Juan Gris y Fernand Léger.

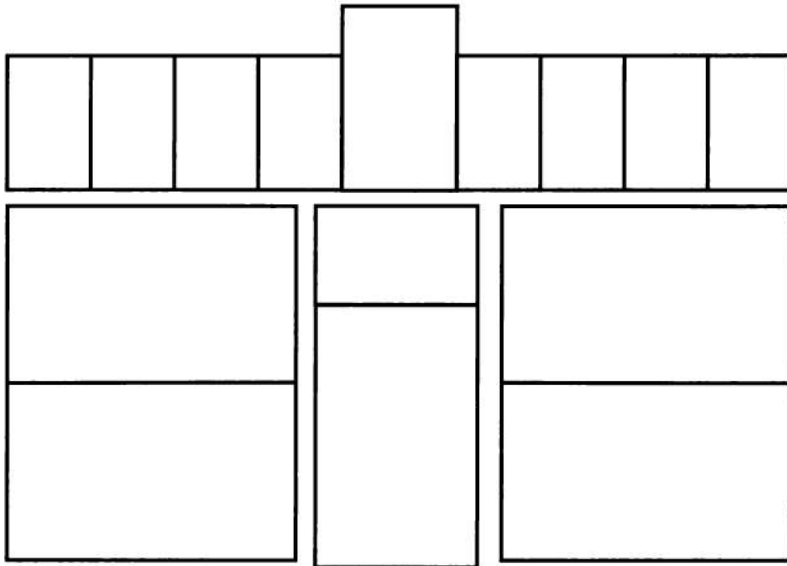
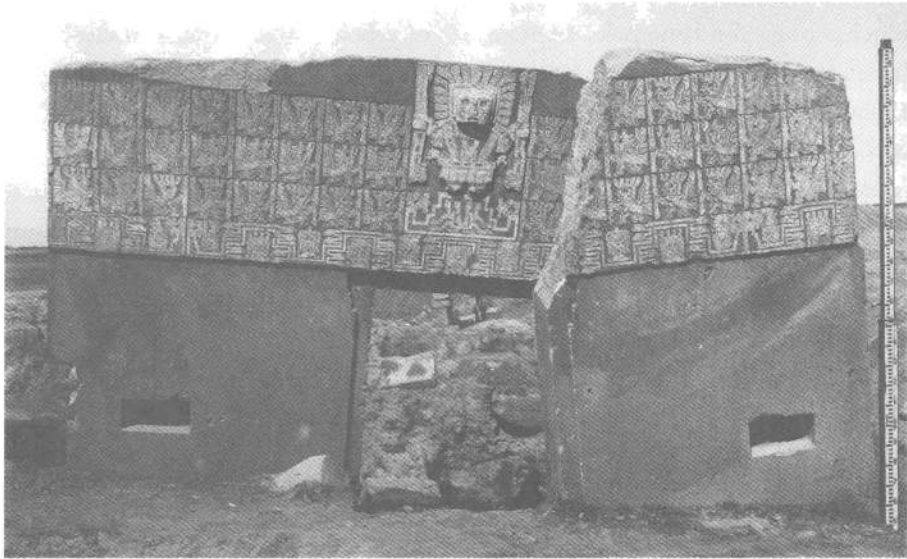
La proporción áurea en la arquitectura

La proporción áurea se intuye en construcciones humanas desde los antiguos egipcios, aunque raramente puede asegurarse que ello obedeciera a una preferencia deliberada. La altura y la base de la gran pirámide de Keops, por ejemplo, guardan entre sí una íntima correspondencia con Φ .



Los arcos del triunfo de la Roma clásica resiguen la proporción áurea, como también lo hacen las tumbas licias y las iglesias de la antigua ciudad de Mira (la actual Demre turca). Otras civilizaciones muy alejadas de la cultura clásica parecen

coincidir en el aprecio por la razón de oro. No lejos del lago Titicaca, junto a la capital de Bolivia, La Paz, se encuentra la Puerta del Sol de Tiwanaku, monumento de una cultura preincaica regido completamente por Φ .



La Puerta del Sol de Tiwanaku (Bolivia), que en la actualidad se halla medio derruida, tiene una composición que parece articulada por rectángulos áureos. La construcción data del 1500 a.C. aproximadamente.

Como ya se mencionaba en el primer capítulo, siempre se ha considerado que, de todas las construcciones de la Antigüedad, el ejemplo más representativo de uso clásico de la proporción áurea en la arquitectura ha sido el Partenón. No en vano, el nombre moderno de la sección áurea, *phi*, es la inicial del constructor de este monumento, Fidias. Sin embargo, hoy en día este punto es objeto de discusión.



El Partenón de Atenas, cuyas proporciones áureas se señalan tradicionalmente como paradigmáticas, aunque la medición exacta sobre el terreno presente ligeras divergencias.

Ciertamente, la media y extrema razón tuvo su mayor valedora occidental en la cultura griega, pero una toma de medidas sobre el terreno arroja una cantidad de inexactitudes tan sorprendente que han acabado por levantarse las sospechas en una parte considerable de la comunidad de expertos. ¿Es posible que en la historia de la cultura occidental haya habido un intento de encontrar la relación áurea en el diseño del Partenón más que un uso consciente por parte de sus constructores? Es el problema de la interpretación cuando los datos son lo convenientemente ambiguos; una cuestión que ha dado mucho trabajo en todas las civilizaciones a los exegetas de todos los tiempos. Siempre se pueden contar 666 pasos, escalones, pulgadas, entre dos puntos cualesquiera para justificar la subida del demonio desde los infiernos o la bajada del profeta desde los cielos. De igual manera, tomando las medidas adecuadas en cualquier monumento, siempre se puede encontrar Φ como cociente, aunque el arquitecto no pensara en ella en su construcción.

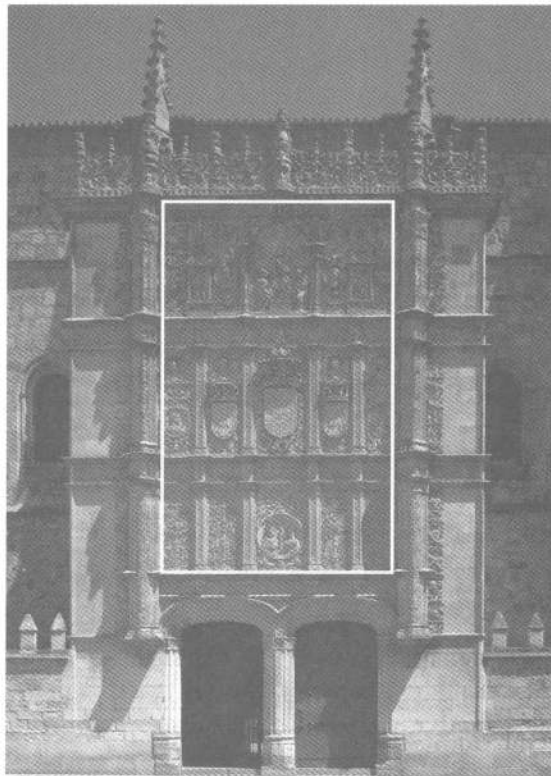
Sin embargo, podemos certificar como usos conscientes las manifestaciones de la divina proporción en la Edad Media, porque a menudo están documentadas. El pentágono regular o el pentágono estrellado aparecen como recursos de construcción durante todo este periodo. Los espectaculares rosetones de las catedrales góticas son clásicos ejemplos de ello.

Con la edición traducida de Vitruvio, los teóricos de la arquitectura renacentistas reivindicaron la necesidad de la armonía de las proporciones en las construcciones en pos de la belleza. En el apartado correspondiente de *La divina proporción*, Luca Pacioli pone al hombre como centro de todas las cosas: «Hablaremos antes de la proporción humana referente a su cuerpo y miembros, pues toda medida con sus denominaciones se deriva del cuerpo humano y en él están señaladas por el dedo del Altísimo toda suerte de proporciones y proporcionalidades que revelan los más intrínsecos secretos de la naturaleza», para luego utilizarlo como medida del mundo: «Y por eso los antiguos, considerando la debida disposición del cuerpo humano, conformaban todas sus obras, máxime los templos sagrados, de acuerdo con la proporción de dicho cuerpo, pues en aquél encontraban las dos figuras principales sin las cuales no es posible hacer nada, es decir, la circular... y el cuadrado».

En el libro *De re aedificatoria*, el polifacético Leon Battista Alberti (1404-1472) afirma que la belleza consiste en la armonía de las partes entre sí y con el todo. Dice Alberti que la belleza «es el valor absoluto de un organismo estético, que irradia en el alma humana una alegría interior, suscitando un acuerdo irremplazable entre el hombre y el universo mediante el cálculo matemático, el juego de las proporciones, o en términos tomados del *Timeo* de Platón, de las medias pitagóricas».

La estrecha relación entre proporción y armonía en el ámbito de la música espoleó esta búsqueda de la concordancia entre los elementos de una construcción. La idea partió quizá de la reflexión de Andrea Palladio (1508-1580), el arquitecto véneto del manierismo, que tanta influencia tendría en el neoclasicismo. En su obra *Cuatro libros de arquitectura* consideró que las proporciones de las voces eran armonías para los oídos, mientras que las de las dimensiones eran armonías para los ojos: «Dichas armonías suelen complacer considerablemente, sin que nadie salvo aquellos que estudian las causas de las cosas sepa por qué».

No sólo la Italia del Renacimiento practicó el uso de la razón áurea en el diseño de sus edificios monumentales. La Universidad de Salamanca es la más antigua de España (data de 1218) y la primera de Europa que tuvo el título de universidad.

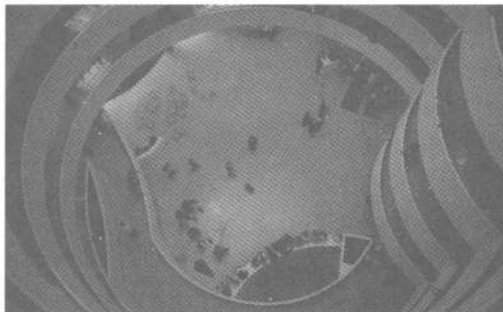


La composición de la fachada de la Universidad de Salamanca se encuentra presidida por un gran rectángulo áureo.

La fachada fue reconstruida en el siglo xv siguiendo el estilo plateresco, una fusión de mudéjar y gótico flamígero exclusiva del Renacimiento español. La relación de oro preside sus proporciones.

Arquitectura contemporánea

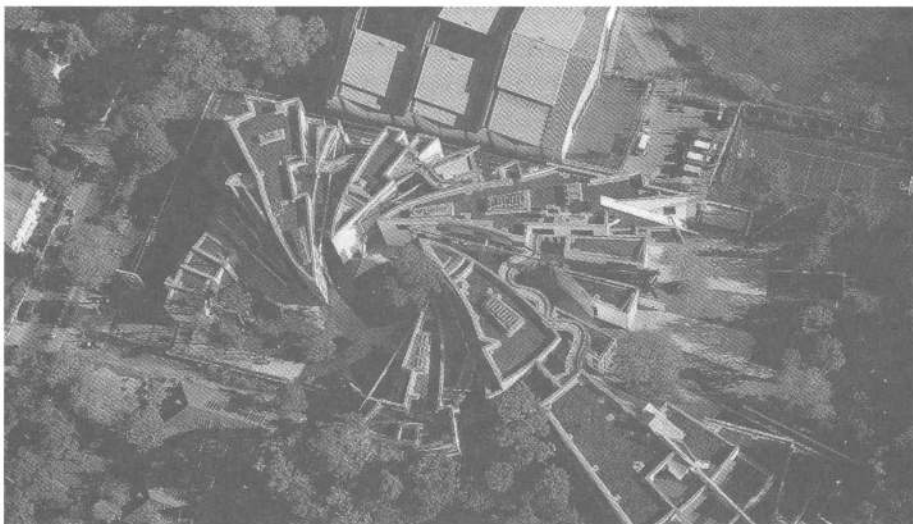
Los avances en las técnicas de construcción y el desarrollo de nuevos materiales hicieron estallar los límites para la imaginación de los arquitectos del siglo xx. El norteamericano Frank Lloyd Wright (1867-1959) fue uno de los representantes de la arquitectura orgánica. Poco antes de morir, como elegante canto del cisne y legado impagable para la posteridad, diseñó la gran rampa de acceso al Museo Guggenheim de Nueva York siguiendo una forma muy osada: la estructura del nautilo, es decir, de una espiral.



Exterior e interior del Museo Guggenheim de Nueva York cuya forma de espiral áurea revolucionó la arquitectura en el momento de su concepción.

También el arquitecto polaco Zvi Hecker (1931) utilizó diseños en espiral en las escuelas Heinz-Galinsky de Berlín, construidas en fecha tan reciente como 1995. Hecker partió del concepto de un girasol, con un círculo en el centro alrededor del que rotan todos los elementos arquitectónicos.

El edificio es una combinación de una retícula ortogonal y una concéntrica, intentando representar la simbiosis entre la rigidez del pensamiento humano y el caos controlado de lo natural. Imita a la planta, que sigue la órbita del sol, para que sus rayos iluminen todas las clases a lo largo del día.



Vista aérea de las escuelas Heinz-Galinsky, diseñadas por Zvi Hecker, cuya planta se inspira en la disposición de los pétalos de un girasol. También aquí el arquitecto quiso imitar la naturaleza, en la que la colocación de los pétalos está muy relacionada con Φ .

PROYECTOS DEMASIADO AVANZADOS

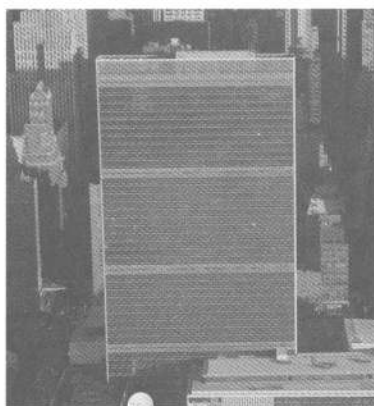
El *Monumento a la Tercera Internacional*, propuesto por el ruso Vladimir Tatlin (1885-1953) en 1920, nunca fue construido, pero las maquetas lo presentan como una enorme torre en hierro, vidrio y acero. Una doble espiral de hierro y acero debía envolver tres pisos-bloques, repletos de ventanas de cristal, que rotarían a velocidades diferentes. El primero sería un cubo y giraría una vez al año; el segundo sería una pirámide, en rotación mensual; y el tercero, un cilindro, rotaría a diario.



El Quincy Park, situado en la ciudad de Cambridge, en Massachusetts (Estados Unidos), está lleno de referencias a la espiral áurea. Fue diseñado en 1997 por el artista David Phillips y se encuentra muy cerca del Clay Math Institute (CMI). El CMI es el centro de investigación matemático célebre, entre otras cosas, por ofrecer desde el año 2000 un millón de dólares por la resolución de cada uno de los siete problemas del milenio, escogidos entre los más importantes pensadores dentro del campo de la investigación matemática. En el Quincy Park se puede pasear entre estatuas con la espiral áurea y curvas de metal, relieves de dos conchas y una piedra con una raíz cuadrada. Una placa da información sobre la razón áurea, e incluso el aparcamiento de bicicletas, utiliza el símbolo de Φ .

Le Corbusier

El rompedor y radicalmente moderno Le Corbusier quiso estrechar la mano de Luca Pacioli a lo largo de los siglos cuando dijo de él que también había buscado en el pasado. En los tiempos del sistema métrico, Le Corbusier aspiró a hacer su propia aportación a la exuberante historia del número de oro. Se quejó de que el sistema métrico había despersonalizado los instrumentos de medida y, por lo tanto, se había perdido la escala humana. Para recuperarla, inventó su propia



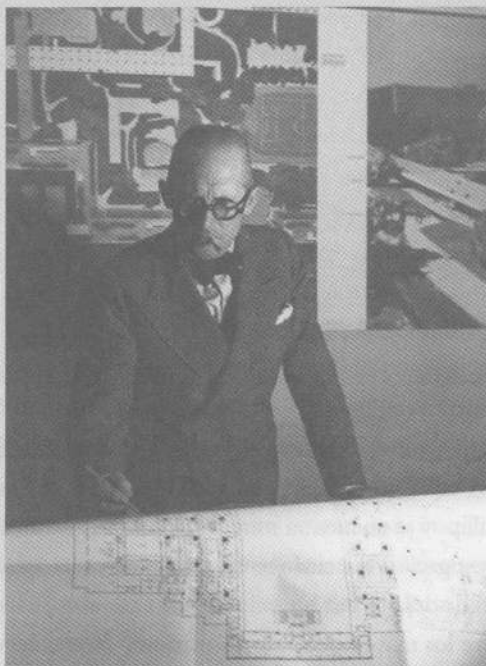
El edificio de Naciones Unidas en Nueva York presenta tres rectángulos áureos.

LE CORBUSIER (1887-1965)

Charles-Édouard Jeanneret-Gris, llamado Le Corbusier, era de origen suizo pero se nacionalizó francés. Comenzó en su tierra natal el aprendizaje de oficios artísticos que le acabarían conduciendo a la arquitectura. A los 29 años acudió a París, donde abrió su propio estudio de arquitecto en 1922. Viajó por Europa, Iberoamérica y Estados Unidos.

Le Corbusier se proyectó más allá de la arquitectura, en el urbanismo y el diseño (algunos de sus diseños son iconos contemporáneos, como su silla *chaise longue*). Fundó revistas influyentes, dictó conferencias y publicó numerosos tratados teóricos; fue también un notable pintor.

Construyó casas individuales y grandes urbanizaciones en países de todo el mundo, convirtiéndose en uno de los arquitectos más conocidos a nivel mundial. Participó en la comisión internacional que diseñó el edificio de las Naciones Unidas en Nueva York. Con modificaciones de Niemeyer, otro gigante de la arquitectura y discípulo suyo, finalmente se realizó su proyecto. No es extraño, por lo tanto, que se puedan identificar tres rectángulos áureos en la fachada del monumental del edificio.



escala, basada en la proporción áurea, pero pasada por el tamiz de los tiempos modernos. Como respuesta al hombre de Vitruvio, ideó el *hombre de modulator*. «El metro, el centímetro, el decímetro no son de la escala humana, el *modulator*, sí. Tomé las proporciones desde el plexo solar hasta la cabeza y el brazo y encontré la sección de oro allí, y creé un sistema de dimensionamiento que responde a las dimensiones del cuerpo humano. Lo descubrí sin darme cuenta. No soy pretencioso, pero es importante y abre a la industria enormes posibilidades; es útil y moderno..., es una innovación sensacional».

Matila Ghyka recogió la aportación de Le Corbusier, en el volumen segundo de su libro *El número de oro*, en el que explicaba que el rectángulo áureo «ha entrado triunfalmente en arquitectura a través de los planos recientes del más célebre apóstol y representante de las nuevas tendencias». A continuación describió los planos del arquitecto para el *Mundaneum* de Ginebra. Le Corbusier explicó que había concebido el *Mundaneum* como una ciudad rectangular, donde la razón entre la longitud y la profundidad del rectángulo está dada por Φ : «La sección áurea define ambos ejes [de crecimiento], así como los lados del recinto general [...] El ritmo está ordenado de acuerdo con la sección áurea, medida que ha determinado la armonía de tantas obras de todos los tiempos».

Los años de la Segunda Guerra Mundial detuvieron la construcción y se centraron lamentablemente en la tarea opuesta. Le Corbusier dedicó ese tiempo a la teoría. Entre 1942 y 1948 desarrolló el *modulor*, un sistema de medidas para la edificación y el diseño de mobiliario doméstico basado en la proporción áurea y en las medidas de un cuerpo humano del prototipo sajón (1,82 metros de estatura). El libro *El modulor* se publicó en 1950 y fue un éxito inmediato. Tuvo una continuación en 1955: *El modulor 2*, que adaptaba las medidas del prototipo latino (1,72 metros de estatura). El sistema del *modulor* retomaba el ideal clásico que pretendía relacionar de manera directa las proporciones de los edificios con las del hombre.

Estatua de El modulor realizada a partir de las medidas ideales sugeridas por Le Corbusier en su libro homónimo. El hombre con la mano levantada mide 226 cm y su mitad se encuentra en el ombligo (113 cm). Ambas cifras multiplicadas o divididas por Φ generan una sucesión de Fibonacci.

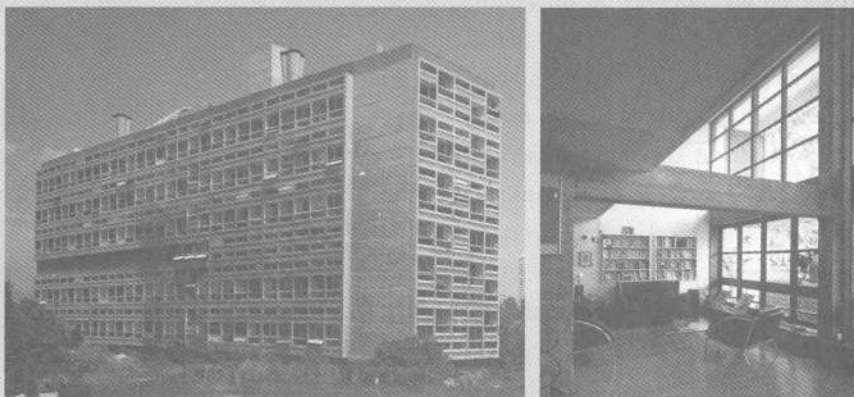


EL NÚMERO DE ORO EN LA OBRA DE LE CORBUSIER

La Ville Saboye, en Poissy, a las afueras de París, es un ejemplo magistral del empleo de Le Corbusier de la proporción con razón Φ , algo que se aprecia en tanto en el exterior como en el interior del edificio. Le Corbusier lo aplicó hasta sus últimas consecuencias en una gran obra tanto para el diseño funcional como por sus consecuencias estéticas: la Unidad Habitacional de Marsella.



La Ville Saboye es hoy día casa museo y monumento nacional de Francia. En las fotografías, vista de la parte trasera y del salón, con acceso directo a la terraza.



Exterior e interior de la Unidad Habitacional de Marsella. En ella el arquitecto diseñó todos los espacios partiendo de las proporciones del sistema modular.

La proporción áurea en el diseño

La caligrafía comenzó con la utilización de la imprenta, y, cómo no, en el diseño de los tipos de imprenta intervinieron viejos conocidos de nuestra pequeña historia, como Luca Pacioli, Leonardo da Vinci o Durero. En esa tarea aplicaron los mismos principios de proporcionalidad que regían el resto de sus actividades. Al realizar el

Libro de plegarias del emperador Maximiliano I, Durero utilizó la proporción áurea tanto en el texto como en las decoraciones laterales.

Sin embargo, desde antes de Guttenberg el formato de los libros contemplaba una aproximación a la razón de oro. La proporción que se considera más armoniosa para los libros es 1:1,6 (también expresable como 5:8), pero se suele reservar para las ediciones de lujo, pues aprovecha menos el papel. El formato más habitual es el que se denomina *proporción normalizada*, que es 1:1,4 (también expresable como 5:7).

Aunque actualmente a las generaciones digitales todo esto les pueda parecer batallas de otro tiempo, no se debe caer en la desmemoria. Aún hoy en día se usa Φ para el diseño de páginas web. Además, el más importante icono del diseño actual, el reproductor de archivos MP3 de la marca más famosa, que la mitad de la humanidad va escuchando por la calle, tiene las dimensiones de un RA.

También son RA las cajetillas de cigarrillos, desde que una conocida marca impuso ese diseño en 1955 en una campaña de cambio de imagen. En el fondo, el motivo era menos estético que práctico. Las actuales cajetillas se construyen con una ingeniosa forma de plegado, que además permite hacerle una tapa. Por ello ese diseño se llama *flip-top box*. El rectángulo mayor de la caja ortoédrica resultante tiene unas dimensiones de $8,5 \times 5$ cm, cuyo cociente es Φ . Su gran éxito la generalizó y fue copiada en todo el mundo por todas las marcas.

En el diseño de ropa hay peculiares utilizaciones de la proporción áurea. Una empresa estadounidense diseña sus *jeans* con Φ apareciendo en la curva del bolsillo delantero, en las proporciones del bolsillo trasero, en la relación entre el pespunte de la cadera y la costura interior de los pantalones.

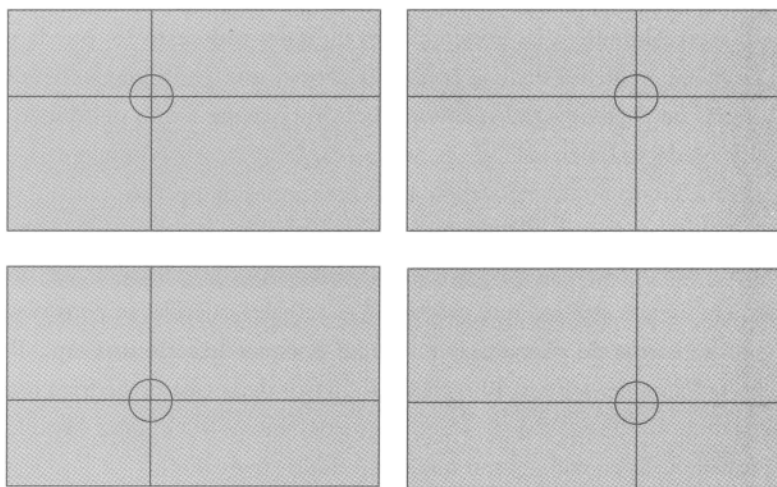
Otra manifestación de su omnipresencia hace saltar la proporción áurea al terreno de juego. Los campos de fútbol son rectángulos con un módulo aproximado de 1,52 en su inmensa mayoría. Pero otros no lo son, y un ejemplo destacado es el

LAS RANAS DE FIBONACCI

En la Exposición Universal del 2008, celebrada en la localidad española de Zaragoza, los artistas Ángel Arrudi y Fernando Bayo distribuyeron 610 pequeñas ranas por todo el recinto, pues 610 es uno de los términos de la sucesión de Fibonacci. En el centro, colocaron una escultura en hormigón en forma de cubo varado en tierra, donde, aplicando la proporción áurea, se formaba una conjunción de un cubo con un círculo, con la medida del número π . La instalación se llamó *Ranillas*.

del Real Madrid Club de Fútbol. Su campo es un rectángulo prácticamente áureo, de módulo 1,606 (las medidas son 106×66 metros).

Aunque no suelen declarar ser conscientes de ello, muchos dibujantes de historietas también utilizan Φ en sus dibujos. Si aplicamos Φ a una viñeta que sea un rectángulo 5×3 cm, tendremos $5 \text{ cm} : 1,618 = 3,09 \text{ cm}$ y $3 \text{ cm} : 1,618 = 1,85 \text{ cm}$. Así, se pueden llevar estos resultados al rectángulo de cuatro formas diferentes.



Se puede comprobar el uso de esa división de la viñeta en los trabajos de muchos dibujantes, al igual que la utilización de divisiones puras de la viñeta en una proporción áurea exacta.

Tampoco el diseño aplicado a la música escapa a la relación áurea. El prominente *luthier* Antonio Stradivarius (1644-1737) ponía gran cuidado en situar los agujeros de sus violines en proporción áurea. Pese al rigor del italiano, no hay ninguna evidencia sobre la influencia de esa colocación en la calidad del sonido. En cuanto a compositores, parece que tanto Debussy como Béla Bartók conocían y usaban en sus partituras la proporción áurea.

El número áureo y la naturaleza

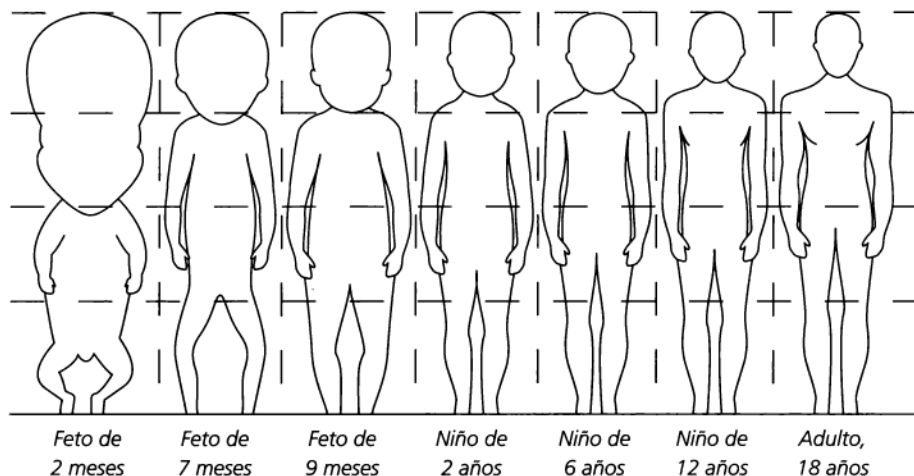
Imaginemos una forma muy sencilla, un rectángulo, por ejemplo. ¿Cómo puede crecer sin perder su forma? El sentido común nos indica que deberá crecer de manera uniforme, es decir, en la misma proporción en todas direcciones; como si los lados fueran elásticos y se estiraran poco a poco, con cuidado. Aunque parezca lo más lógico, si midiéramos el crecimiento según ese método, veríamos que la forma del rectángulo (la relación entre las longitudes de los dos lados) no se mantiene constante, con lo que perdería su forma.

Crece conservando la forma

En el capítulo 2 comprobamos que, añadiendo a un rectángulo áureo cuadrados de lado igual al de su lado mayor, da lugar a otro RA. Con ello, se aumenta su tamaño pero su forma se conserva, puesto que todos los rectángulos RA tienen la misma relación entre sus lados (evidentemente, Φ). Sucedió algo similar, aunque a la inversa, al sustraer cuadrados al RA. Por eso decíamos que el gnomon del RA era el cuadrado. Esta propiedad es exclusiva de los RA, pues lleva a la definición de Φ . Por lo tanto, para variar el tamaño de una figura sin cambiar su forma se puede utilizar la proporción áurea. Lo comprobaremos observando el crecimiento de los seres vivos, sobre todo de los vegetales.

Para entender lo que significa exactamente «conservar la forma», pensemos un momento en el ser humano. ¿Se conservan sus proporciones? Muy al contrario, diríamos que su desarrollo es un constante cambio de proporciones. Aunque siempre protestemos por ello, es una suerte que nos transformemos con la edad, porque si conserváramos la forma que teníamos al nacer tendríamos serios problemas para mantener la cabeza erguida.

Por otra parte, vimos también la espiral áurea, cuya diferencia fundamental con otras espirales es que se va ensanchando a medida que gira. El biólogo escocés D'Arcy Thompson (1860-1948), llamado «el primer biomatemático», identificó



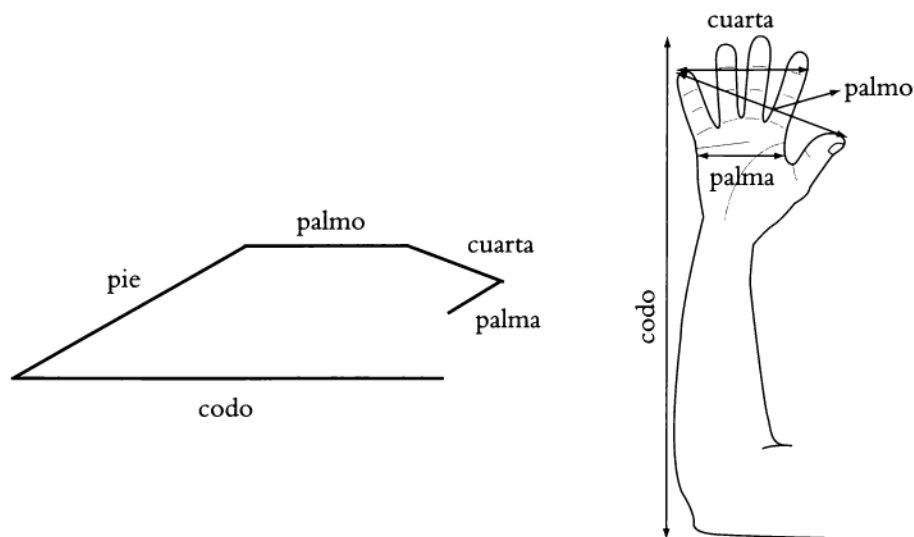
Comparativa de la proporción entre el cráneo y el cuerpo humano en las distintas etapas de crecimiento.

que la propiedad de algunos seres vivos de aumentar por crecimiento terminal sin modificación de la forma total es característica de la espiral logarítmica y de ninguna otra curva matemática: «Toda curva plana que parte de un polo fijo y de tal naturaleza que el área polar de un sector sea siempre un gnomon respecto del área precedentemente obtenida, es una espiral logarítmica».

Los insectos trazan una espiral áurea cuando se acercan a un punto de luz. Si en vez de alejarnos de un punto determinado, queremos acercarnos a él conservando el ángulo de giro, sólo podremos hacerlo así. Las aves de presa mantienen esa trayectoria cuando se lanzan a cazar. Es la única manera en la que pueden mantener la cabeza recta y sin variarla de posición, con lo que siempre tienen control visual sobre las presas y maximizan la velocidad.

La proporción áurea en los seres vivos

El hombre ideal de Leonardo supuso una primera reflexión sobre la presencia de Φ en el mundo animal. A partir de entonces, la historia del arte y de la ciencia ha visto numerosos estudios sobre la adecuación de diferentes partes del cuerpo humano a la proporción áurea. Pero ya en la Edad Media la medida humana se usaba como patrón. Los constructores de catedrales franceses utilizaban un instrumento de medida consistente en cinco vástagos articulados con las longitudes de la palma, la cuarta, el palmo, el pie y el codo, que correspondían a las magnitudes del brazo humano, además de la longitud del pie.



Todas esas longitudes eran múltiplos de una unidad llamada *línea*, que equivalía a poco menos de 2,5 mm (con más exactitud 2,247). La siguiente tabla muestra la equivalencia de estas medidas con la línea y con nuestras unidades actuales. Se puede comprobar que las líneas son términos sucesivos de Fibonacci; por lo tanto, la razón de cada uno respecto al anterior será Φ , lo que no deja de ser sorprendente, pues las medidas iniciales fueron tomadas en el cuerpo humano.

palma	34 líneas	7,64 cm
cuarta	55 líneas	12,63 cm
palmo	89 líneas	20 cm
pie	144 líneas	32,36 cm
codo	233 líneas	52,36 cm

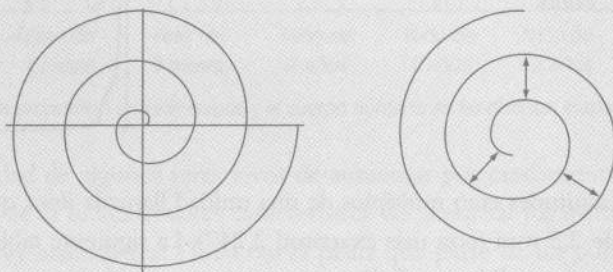
La filotaxis y la proporción áurea

La *filotaxis* es una palabra de origen griego, compuesta por *phyllon*, que significa «hoja», y *taxis*, que quiere decir «orden», con la que se define la disciplina de la botánica que estudia la disposición de las hojas sobre el tallo, la cual, como veremos, sigue pautas geométricas y numéricas. Esta disciplina permite descubrir algunas de las manifestaciones naturales más asombrosas por la inteligencia de su diseño, a menudo expresable en términos matemáticos increíblemente precisos.

ESPIRALES

Una espiral es una curva continua que va dando vueltas alrededor de un punto central sin cruzarse nunca. Existen diferentes tipos, trazados por métodos diversos, con propiedades exclusivas en cada caso.

El primer tipo es el llamado *espiral de Arquímedes*, en honor a su descubridor, de quien se dice que la observó por primera vez en una tela de araña. Si enrollamos una cuerda en un palo, al desenrollarla manteniéndola tirante, su extremo describe una espiral en la que la distancia de éste es proporcional al ángulo girado. Una de sus propiedades más curiosas es que la distancia entre dos espiras se mantiene constante.



Si seguimos el mismo procedimiento con una cuerda enrollada en un cono, la espiral que resulta es la *espiral áurea* o *de Durer* (la famosa *espiral logarítmica* que hemos encontrado a lo largo del libro). En este caso, las espiras van creciendo en anchura, como puede observarse en el dibujo exterior del caparazón de un caracol o de la concha del nautilus.

Una espiral proyectada en el espacio se convierte en una hélice. Las hélices pueden crecer al girar, como vemos en los cuernos de algunos animales o en un simple sacacorchos, con lo que tenemos *hélices conoidales*; pero también pueden mantener una anchura constante (como en el caso de los muelles, las escaleras de caracol, las cintas que se enrollan o la doble hélice del ADN), en lo que llamamos *hélices cilíndricas*.

Para empezar, se puede observar a simple vista en cualquier planta que las hojas no crecen nunca una encima de otra. Si lo hicieran, se ocultarían unas a otras el sol que necesitan, así como la lluvia o el oxígeno. A priori parece simplemente lógico, pero si lo pensamos un momento, se diría que revela una suerte de conciencia. Lo más sorprendente está por llegar, pues un análisis más detallado de la disposición de las hojas en la planta revelará siempre un patrón, es decir, una organización.

JOHANNES KEPLER (1571-1630)

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue partidario desde muy joven de la teoría heliocéntrica del movimiento planetario, de su colega polaco Copérnico, que establecía que los planetas giran alrededor del sol. La doctrina oficial seguía defendiendo de manera inamovible que la Tierra era el centro del universo, y sostener lo contrario causaba polémica, y podía llevar a la cárcel. En un principio, Kepler se adscribió sin reservas al concepto pitagórico donde todo se rige por el número. Creyó encontrar un modelo cosmológico basado en los cinco sólidos platónicos (los cinco únicos poliedros regulares posibles), con los que intentaba dar una respuesta geométrica a los intervalos entre las órbitas de los seis



planetas entonces conocidos. Lo presentó en su primera obra, *Mysterium cosmographicum* (El misterio cosmográfico), de 1596. Kepler trataba de explicar la armonía del mundo siguiendo el concepto griego, y «armonizar» en griego quiere decir «encajar».

El modelo es descrito de la siguiente forma: «la esfera de la Tierra es la medida de todas las órbitas. Circunscribe un dodecaedro a su alrededor. La esfera que lo rodea es la órbita de Marte. Circunscribe un tetraedro alrededor de Marte. La esfera que lo rodea es Júpiter. Circunscribe un cubo alrededor de Júpiter. La esfera que lo rodea será la de Saturno. Ahora inscriba un icosaedro en la órbita de la Tierra. La esfera inscrita es la órbita de Venus. Inscribe un octaedro dentro de Venus. La esfera inscrita en él es la de Mercurio».

Con esta construcción, el alemán logró un hermoso y armónico modelo que encaja con las observaciones y cálculos de su época con escasos errores; pero no tiene nada que ver con la realidad, como él mismo tuvo que reconocer poco después.

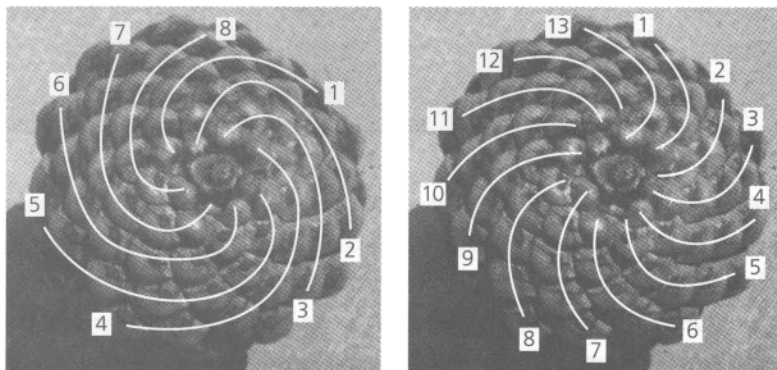
Los pensadores de la Grecia clásica ya advirtieron algunas de estas propiedades, pero sería Leonardo el primero en desentrañar las claves de la disposición. El genio se dio cuenta de que las hojas se colocaban siguiendo espirales a lo largo del tallo en grupos de cinco, lo que indica que el ángulo de giro de las hojas tiene que ver con múltiplos de $1/5$. Un poco más tarde, Kepler observó que el pentágono tenía una presencia importante en las flores, que a menudo tienen cinco pétalos, o en las frutas, cuyas semillas a menudo se distribuyen formando un pentágono estrellado, como la manzana.

La filotaxis y las matemáticas comienzan a aproximarse en el siglo XIX, de manos del naturalista alemán Karl Schimper (1803–1867) y el cristalógrafo francés Auguste Bravais (1811–1863). Ambos advirtieron la presencia de números consecutivos de la sucesión de Fibonacci en las piñas. En sus estudios desarrollaron la regla general de los factores de la filotaxis, que podían ser expresados como cocientes de los números de Fibonacci.

A partir de entonces, la sucesión de Fibonacci y la botánica quedaron unidas. En 1968 el matemático norteamericano Alfred Brousseau hizo un estudio con 4.290 piñas de diez especies diferentes de pinos de California y pudo comprobar que, con la insignificante excepción de 74, todas las demás seguían la sucesión de Fibonacci, lo que supone una coincidencia del 98,3%. Como suele suceder, pasado el tiempo suficiente, la comunidad científica tuvo otro ataque de escepticismo y repitió el estudio en 1992. El botánico canadiense Roger V. Jean amplió el estudio a 12.750 observaciones de 650 especies diferentes. La sucesión de Fibonacci apareció en el 92% de los casos.

Las hojas de la mayoría de las plantas de tallo alto parten de este último siguiendo una espiral, y cumplen la ley de divergencia, que establece que, para cada especie de planta, el ángulo que forman dos hojas consecutivas es constante y se llama *ángulo de divergencia*. Este ángulo se expresa en grados, como una fracción en la que el numerador es el número de vueltas alrededor del tallo desde una hoja a la siguiente, y el denominador, el número de hojas que se encuentran en ese recorrido.

La serie de Schimper-Braun, formada por los cocientes entre uno de los términos de Fibonacci y el de dos lugares más adelante: a_n / a_{n+2} , nos da una clasificación



El número de espirales (8, 13) en cada uno de los dos sentidos de giro de esta piña son términos contiguos de la sucesión de Fibonacci.

de muchas especies según su ángulo de divergencia. Si recordamos que el cociente entre dos términos consecutivos, a_{n+1}/a_n , tiende a Φ , tendremos que la serie anterior tenderá a $1/\Phi^2$. El razonamiento matemático sería más o menos así:

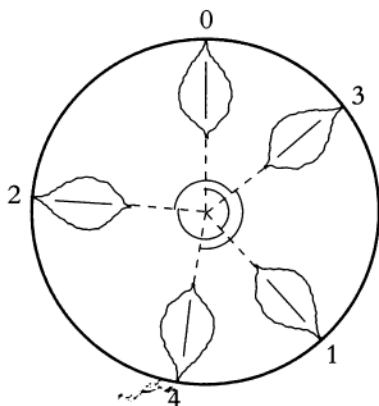
$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$$

La pregunta realmente difícil de contestar es: ¿cómo «saben» las plantas que deben posicionar sus hojas siguiendo el modelo de la sucesión de Fibonacci? Pues bien, el crecimiento de las plantas se da en la punta del tallo, que tiene forma cónica. Las hojas que crecen primero y están más abajo tienden a estar alejadas del tallo de forma radial cuando se ve la planta desde arriba, porque allí el tallo es más grueso. Bravais descubrió que las nuevas hojas avanzan rotando el mismo ángulo, aproximadamente $137,5^\circ$. Si calculamos

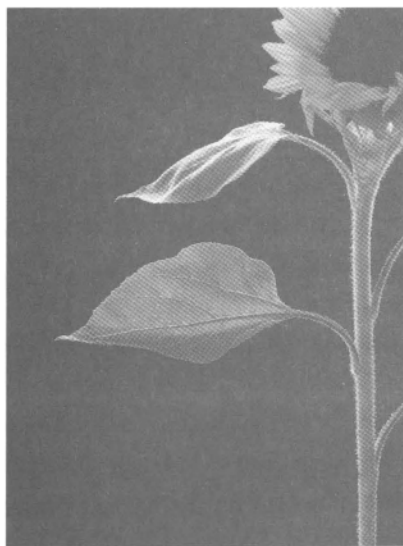
$$360^\circ \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{360^\circ}{\Phi^2}$$

(los 360° que corresponden a una vuelta completa por el límite al que converge la sucesión anterior), se obtiene justamente $137,5^\circ$, que a veces se llama *ángulo áureo*.

Trabajando en sentido inverso, desde las matemáticas hacia la botánica, un equipo de científicos liderado por N. Rivier descubrió en 1984 que, utilizando un

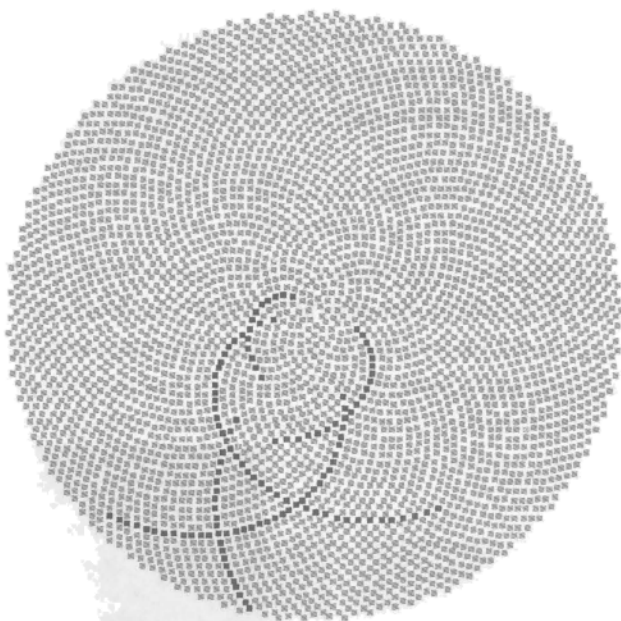


Las hojas adyacentes del tallo de un girasol se disponen con una distancia angular de aproximadamente $137,5^\circ$ entre sí, es decir, cada una rota $137,5^\circ$ con respecto a la anterior.



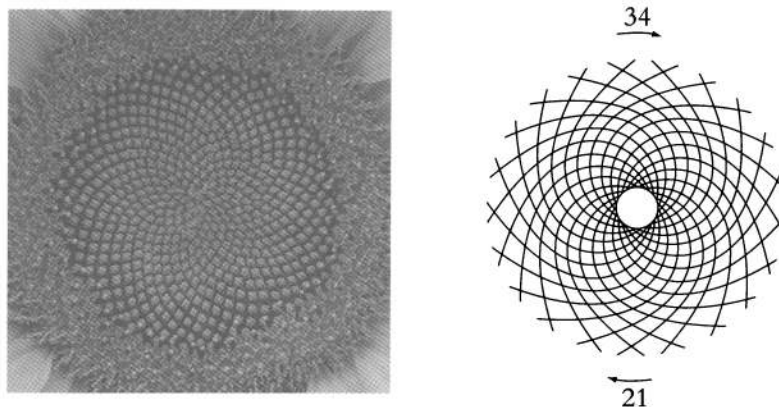
algoritmo matemático con un ángulo de crecimiento igual al ángulo áureo, se obtienen estructuras similares a girasoles reales. Su conclusión fue interesante: son los propios requerimientos de homogeneidad y autosimilitud los que limitan de manera drástica las estructuras posibles, lo que podría explicar la frecuente aparición de los números de Fibonacci y de la razón áurea en la filotaxis. Otros experimentos con campos magnéticos también muestran configuraciones con espirales áureas.

En esta repartición de semillas virtual generada por ordenador, se observa con claridad la emergencia de un gran número de espirales de distinta curvatura. El número de espirales de longitud similar en uno y otro sentido suelen ser términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.



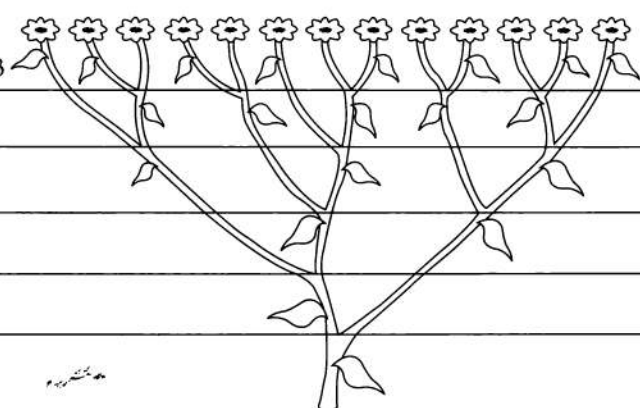
Así se corroboró el clásico experimento de 1907 del matemático alemán Gerrit van Iterson, quien amontonó puntos sucesivos separados por 137.5° en espirales y mostró que el ojo humano observa una familia de patrones espirales a favor y en contra de las agujas del reloj. El número de espirales en las dos familias tienden a ser números de Fibonacci consecutivos. El girasol es la muestra más espectacular y mejor conocida de este fenómeno. Cuando se mira un girasol, se ven espirales a favor y en contra de las agujas del reloj, formadas por las semillas (las pipas de girasol); las cantidades de cada una de ellas son también términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Los más frecuentes son los pares 21-34, 34- 55 y 89-144.

¿Es todo ello una característica necesaria del crecimiento o sólo una fascinante tendencia generalizada?



Esta flor del girasol presenta un par de 21 y 34 espirales de sentido contrario.

Similar a las hojas es lo sucedido con las ramas de un árbol, que tampoco nacen amontonadas, sino de nuevo en espirales. El tamaño de un árbol va variando a lo largo de su vida, pero su aspecto exterior es el mismo; se mantienen las proporciones entre su altura y la longitud de sus ramas, así como sus formas relativas. Gracias a ello se pueden distinguir en la distancia unas especies de otras sin tener que estudiar con detenimiento sus hojas o su corteza.

13		8
8		5
5		3
3		2
2		1
1		1
Ramas		Hojas

El botón de plata (Achillea ptarmica) es una de las muchas plantas cuya disposición de ramas y hojas sigue la pauta de la sucesión de Fibonacci.

Flores y pétalos

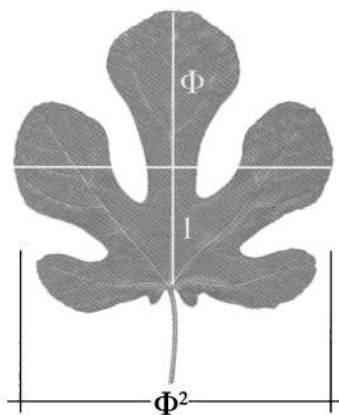
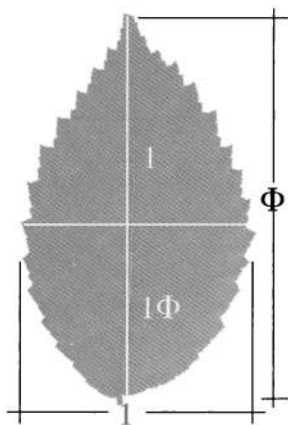
El número de pétalos de muchas flores suele ser también alguno de los términos de la sucesión de Fibonacci, como en el caso de la lila (3), el ranúnculo (5), la espuela (8), la caléndula (13) o el aster (21). Los diferentes tipos de margaritas tienen distintos números de pétalos, pero siempre son números de Fibonacci (21, 34, 55, 89).

Un lugar común en las historias de amor es la pregunta a la margarita, pétalo a pétalo: ¿Me quiere o no me quiere? Podría parecer que un matemático enamorado puede jugar con ventaja a la hora de deshojar la margarita, pero no es así. Por suerte, la naturaleza y las sucesiones de Fibonacci siguen dejando espacio para el azar y la incógnita se mantiene intacta; aunque el número de hojas de la margarita sea un término de Fibonacci, en la sucesión hay valores pares e impares y no podemos saber cuántas hojas va a tener una margarita cualquiera. La pregunta romántica seguirá siempre teniendo una respuesta imprevisible.

Como ocurre en la arquitectura, a veces la presencia de la proporción áurea en las formas y dimensiones vegetales puede parecer más forzada que natural, pero los casos rigurosamente documentados no sólo son sorprendentes, sino muy sugerentes y hermosos.



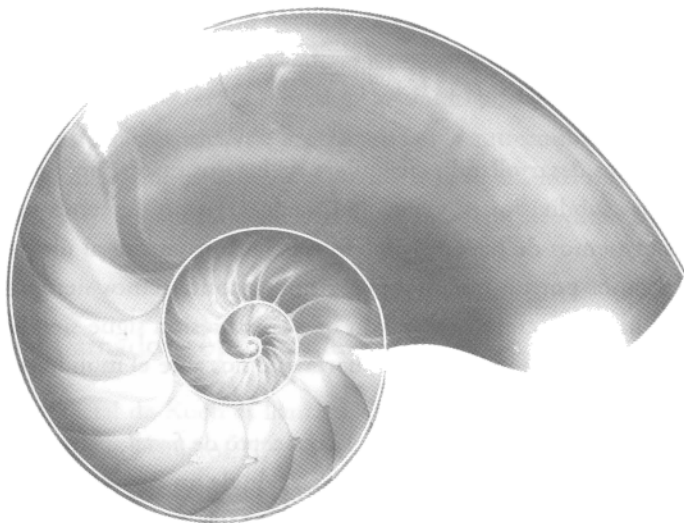
El número de los pétalos de la margarita es siempre un número de la sucesión de Fibonacci; en este caso, 21.



*El olmo de montaña (Ulmus glabra) y al lado la frecuente higuera (Ficus carica).
Obsérvense las proporciones áureas de sus hojas.*

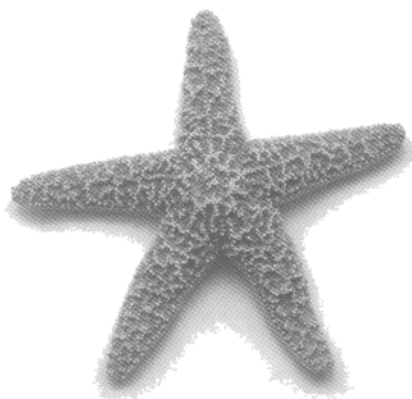
El nautilus

La espiral equiangular o áurea da forma a los caracoles, y quizá su ejemplo más extraordinario es el nautilus o nautilo (*Nautilus pompilius*). La estructura de su interior se construye añadiendo cámaras de mayor tamaño cada vez pero siempre conservando la forma. Sobre cada parte de la concha que permanece se añade otra nueva, exactamente igual, pero más grande.



En la estructura espiral del nautilo influyen también los movimientos de turbulencia con velocidad de expansión creciente, que podemos observar en los remolinos de los ríos o en un líquido que se va por el desagüe. A gran escala, ésta es la disposición de las galaxias.

En la naturaleza aparecen otros tipos de espirales, como la que forma un gusano al enrollarse, en que la espira es de anchura constante. Se trata de una espiral de Arquímedes, que en realidad no tiene relación con Φ .



También hay en la naturaleza estructuras procedentes de la forma pentagonal, como las estrellas de mar.

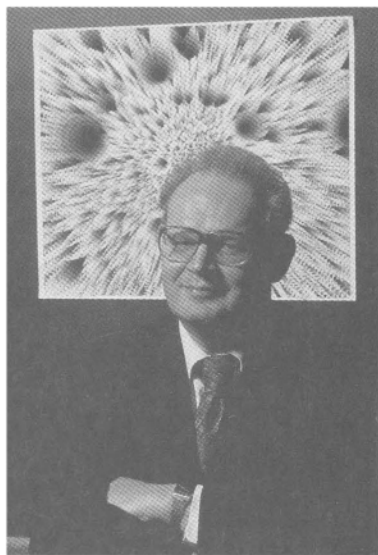
Los fractales y el número áureo

En el primer capítulo vimos dos expresiones de Φ , la primera, como fracción continua, y la segunda, como raíz de otras raíces:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = [1, 1, 1, 1, \dots] = [\bar{1}] \quad (1)$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (2)$$

Si continuamos desarrollando cualquiera de los dos casos, conseguiremos subdivisiones de las subdivisiones, raíces de las raíces, en un descenso infinitesimal. Cuando nos cansemos de hacerlo, podemos echar un vistazo al último término, como si miráramos por un microscopio, y nos encontraremos siempre, por muy profundo que hayamos creído cavar, con que la expresión sigue siendo la misma. Este complicado ejercicio mental es la puerta que nos abre el mundo de los fractales, desde el universo de Φ .



Benoît Mandelbrot, matemático
que desarrolló el concepto de fractal.

El concepto de *fractal* apareció en 1975 con la publicación de un ensayo titulado *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión* del francés de origen polaco Benoît Mandelbrot (n. 1924). En la introducción, el autor explica que ha inventado los neologismos sinónimos *objeto fractal* y *fractal* a partir del adjetivo latino *fractus*. Siete años más tarde, en *La geometría fractal de la naturaleza*, Mandelbrot redefine su objeto como «un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica», lo que nos disponemos, si no a aclarar, al menos a intentar explicar.

Recordemos que los objetos geométricos «clásicos» tienen dimensiones enteras: el punto tiene 0 dimensiones, la recta tiene 1, el plano tiene 2 y el espacio tiene 3. La di-

mensión fractal, en cambio, es una dimensión decimal. Al estar situada entre dos números enteros, los fractales no se pueden tratar como un volumen y un área «normales». Tener una dimensión no entera es perfectamente posible en el reino fractal. Un fractal con dimensión mayor que 1 y menor que 2 es una superficie no delimitada por una curva o un conjunto de rectas, pero que no llega a ser un plano (su perímetro es infinito y no tiene derivada en ningún punto).

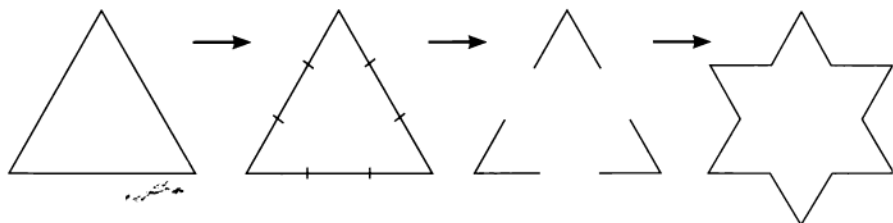
Eso le pasa a la curva de Koch, que se puede construir mediante un proceso geométrico iterado, como veremos a continuación. Si la dimensión fractal está entre 0 y 1, como en el llamado *conjunto de Cantor*, es un grupo de puntos alineados que no llegan a constituir una recta, pese a ser infinitos y a estar infinitamente próximos entre sí. Una curiosa paradoja geométrica, en efecto.

Una de las características de los fractales es la autosimilitud; es decir, que mantienen la misma figura al aumentar o reducir la escala. Los miremos de más cerca o de más lejos, en general o en detalle, la imagen que veremos será siempre la misma.

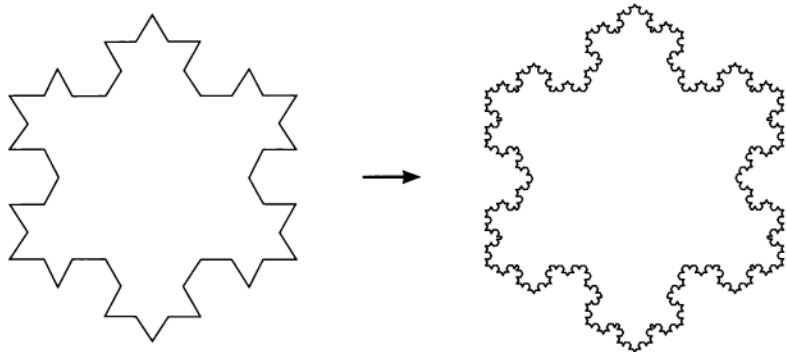
El fractal llamado «copo de nieve»

La curva o fractal de Koch es llamada «copo de nieve» porque es una estilización de la forma de estos objetos. Es una de las primeras figuras fractales, que definió en 1906 el matemático sueco Helge von Koch (1870–1924), antes de la formalización del concepto y del nombre que las ha acabado popularizando. Veamos cómo se forma y cuáles son sus propiedades.

Partiendo de un triángulo equilátero, dividimos cada lado en tres partes iguales. A continuación, eliminamos la parte central de cada lado y dibujamos hacia afuera un triángulo equilátero de lado igual al segmento que hemos eliminado.

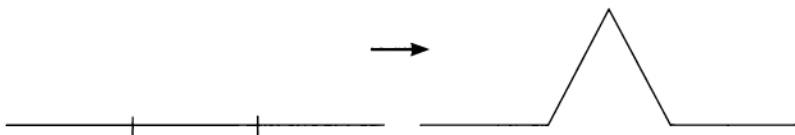


Continuamos el proceso en cada uno de los triángulos equiláteros cada vez más pequeños que van apareciendo. El proceso es cada vez más difícil de realizar con lápiz y papel, pero un ordenador puede hacerlo con facilidad.



Así obtenemos una hermosa estilización de un copo de nieve, del que imágenes tomadas con microscopio muestran que tiene una estructura hexagonal.

Vamos a intentar calcular la longitud y el área de esta curva. En cada uno de los pasos, cambiamos un segmento de longitud 3 (de 3 segmentos) por otro de longitud 4 (de 4 segmentos).

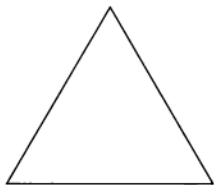


Luego, en cada iteración multiplicamos la longitud inicial por $4/3$. Así, si la longitud inicial del triángulo equilátero era L , en la iteración n la longitud de la curva será

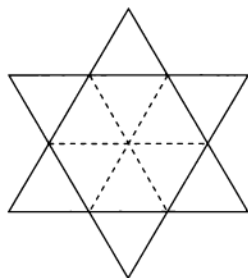
$$L_n = L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

¡Como $4/3$ es mayor que 1, ésta puede hacerse tan grande como queramos! Dicho en términos más matemáticos, la longitud de la curva de Koch, L_n tiende a infinito: basta con continuar las iteraciones para que aumente tanto como deseemos.

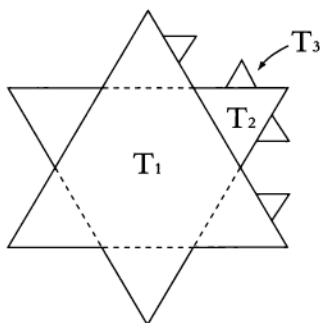
Veamos qué pasa con el área. Supongamos que el triángulo inicial es de área $A=1$.



Si lo dividimos en triángulos de lado la tercera parte, tenemos 9 triángulos de menor tamaño a los que añadimos 3 en la primera iteración, es decir $1/3$ del área inicial. Por tanto, se tiene $A_1 = 1 + 1/3 = 4/3$.



En cada una de las puntas de la estrella T_2 , añadimos en las iteraciones siguientes 4 triángulitos T_3 , es decir, $4/9$ del área de esas puntas, que son la tercera parte del total del área A_1 , es decir, sumamos $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}$.



Por el mismo razonamiento, en cada una de las siguientes iteraciones añadimos $4/9$ del área de las puntas, por lo que en total tenemos como área

$$A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

Esta expresión se puede sumar sacando factor común y sumando el paréntesis como una ~~progresión~~ progresión geométrica indefinida:

$$A = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots\right) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Es decir, después de un número infinito de iteraciones, tenemos una curva de longitud infinita que rodea una superficie finita, puesto que es sólo 1,6 veces el área del triángulo original.

La dimensión de este «copo de nieve» está comprendida entre 1 y 2. Recordemos nuestro primer paso: hemos saltado de un segmento de longitud 3 a uno de 4. Si nos quedamos en la recta, tiene dimensión 1, porque $3^1 = 3$. Si hiciéramos un cuadrado de lado 3, tendría un área 9, porque se cumple que $3^2 = 9$ y la superficie tiene dimensión 2. Como nosotros pasamos a longitud 4, tenemos que encontrar un número d , la dimensión, tal que $3^d = 4$. Para encontrarlo, debemos invocar a los logaritmos.

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,2619.$$

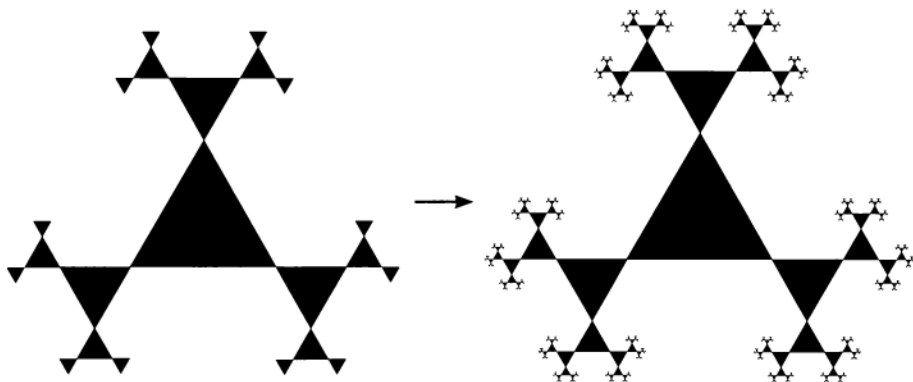
Como vemos, la dimensión es fraccionaria, *fractus*, en el latín resucitado por Mandelbrot. De ahí, el nombre de *fractal*.

Existe una variación de esta curva que nos es muy familiar: el *anticopo de nieve de Koch*. Se define de forma similar al copo, pero las iteraciones se dirigen hacia el interior de la figura. El primer paso fue utilizado para el logotipo de una marca de automóviles japonesa.

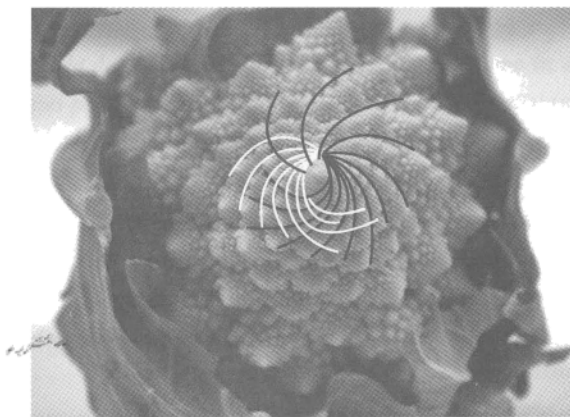


Pero los fractales son mucho más que un curioso artefacto matemático: la naturaleza es, en último término, fractal. Para certificarlo, no debemos hacer más que fijarnos en los árboles: las pautas de crecimiento de sus ramas pueden modelizarse mediante fractales con asombrosa exactitud. Hay muchos modelos fractales de árboles que se van ramificando en cada nudo siempre en un determinado ángulo, para formar ramas cuya longitud sea la de la rama anterior multiplicada por un factor f . Según el valor de ese factor, las ramas pueden llegar a solaparse, es decir, situarse unas encima de otras. Ése es un problema que hay que resolver, si queremos construir sistemas eficientes o modelos de la realidad. Para evitarlo, es conveniente saber cuál es el límite del factor f . Los estudios demuestran que tiene que ver con Φ , porque debe cumplirse que $f = 1/\Phi$.

Si en vez de iniciar el árbol con rectas, lo hacemos a partir de una figura, un triángulo equilátero, por ejemplo, al que le colocamos en cada vértice otro triángulo equilátero cuyo lado sea igual al original, multiplicado por un factor f (en la figura, $f = 1/2$), para que no se solape, sino que sólo se toquen las ramas, el valor máximo también es $f = 1/\Phi$.



El brócoli romanesco (*Brassica oleracea*) es el más hermoso ejemplo de fractal natural, porque su estructura se ve con claridad, sin necesidad de cálculos ni fórmulas matemáticas. Si cortamos un trozo cualquiera, su forma es siempre la misma que el total. Certificamos su relación con Φ al contar las espirales que lo forman en cualquiera de los dos sentidos. Veremos que son dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci: las espirales hacia la derecha son 8 y hacia la izquierda son 13.



Las espirales que se forman en el brócoli romanesco son términos de la sucesión de Fibonacci tanto hacia la derecha como hacia la izquierda.

Final de trayecto

El mundo de los fractales es profundo y complejo; no hemos hecho más que sugerirlo. Las manifestaciones de Φ en la dimensión fractal continúan mucho más allá, hacia terrenos insospechados. Lo que nos interesa de su relación es que nos permite constatar que un número anciano y venerable, que empezó su andadura matemática hace más de veinte siglos, puede conectar perfectamente con los conocimientos matemáticos de vanguardia. El número Φ no es una antigualla que arrumbar en el baúl de los recuerdos, continúa con vida renovada e imparables.

Aquí acaba nuestro viaje, con la esperanza de que haya sido más parecido al de un viajero, que se toma su tiempo al margen del camino si el paisaje lo merece, que al de un turista, al que sólo le interesa el destino. Hemos hecho varios altos en los campos más diversos: la pintura, la arquitectura, la astronomía, el diseño, la propia naturaleza... Pero también hemos procurado alumbrar la ruta, para avanzar con paso firme.

Acabamos de entrar en un territorio de grandes horizontes. Sólo hemos aprendido cómo recorrerlo, pero queda mucho por descubrir. Sirva este apunte como ejemplo de las maravillas matemáticas que aguardan a los intrépidos. En la página web de la Western Washington University encontraremos 10.000 decimales de Φ . Si buscamos en ellos, tropezaremos con toda seguridad con nuestra fecha de nacimiento, pero también con la matrícula de nuestro coche. En realidad, podemos encontrar cualquier tipo de secuencia numérica que podamos imaginar.



Textos originales

Capítulo V de *La divina proporción* de Luca Pacioli

En el quinto capítulo de *De divina proportione*, Pacioli da las cinco razones por las que considera conveniente llamar de tal manera, «La divina proporción», a la relación entre los segmentos resultantes de la media y extrema razón. En el texto se mezclan razones filosóficas, teológicas y matemáticas.

Del título que conviene al presente tratado o compendio

Paréceme, Excelso Duque [de Milán], que el título conveniente a nuestro tratado ha de ser de La Divina Proporción, y ello por gran cantidad de correspondencias semejantes que encuentro en nuestra proporción, de la que tratamos en este nuestro muy útil discurso, que corresponden a Dios mismo. Para nuestro propósito será suficiente considerar cuatro de ellas, entre otras.

La primera es que ella es una sola y no más, y no es posible asignarle otras clases ni diferencias. Y dicha unidad es el epíteto supremo de Dios mismo, según toda la escuela teológica y también filosófica.

La segunda es la de la Santa Trinidad, es decir, que, así como in divinis hay una misma sustancia entre tres personas, Padre, Hijo y Espíritu Santo, de igual manera una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, y nunca más o menos, como se verá.

La tercera es que, así como Dios no puede propiamente definirse ni darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, sino que siempre es oculta y secreta y es llamada ~~irracional~~ por los matemáticos.

La cuarta consiste en que, así como Dios no puede cambiar nunca y está todo Él en todo y todo en todas partes, de igual manera nuestra proporción es siempre, en toda cantidad continua y discreta, grande o pequeña, la misma y siempre invariable, y de ninguna manera

puede cambiar ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto, como demostrará nuestra explicación.

La quinta correspondencia se puede añadir no sin razón a las cuatro anteriores: así como Dios confiere el Ser a la virtud celeste, por otro nombre llamada quinta esencia, y mediante ella a los otros cuerpos simples, los cuatro elementos, tierra, agua, aire y fuego, y a través de éstos da el ser a cada una de las otras cosas de la naturaleza, igualmente nuestra santa proporción confiere el ser formal, según el antiguo Platón en su Timeo, al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo llamado dodecaedro, o cuerpo de doce pentágonos, el cual, como se demostrará más abajo, no puede formarse sin nuestra proporción. Y, del mismo modo, asigna una forma propia, diferenciada, a cada uno de los elementos: al fuego la figura piramidal llamada tetraedro, a la tierra la cúbica llamada hexaedro, al aire la figura llamada octaedro y al agua la conocida como icosaedro. Y según los sabios, todos los cuerpos regulares están ocupados por esas formas y figuras, como se explicará más abajo acerca de cada uno de ellos. Mediante éstos, nuestra proporción da forma a otros infinitos cuerpos llamados dependientes. Y no es posible proporcionar entre sí estos cinco cuerpos regulares ni se entiende que puedan circunscribirse a la esfera sin nuestra proporción. Aunque se podrían añadir otras correspondencias, baste con señalar éstas para la denominación adecuada del presente compendio.

Presentación de *La divina proporción* de Luca Pacioli

El siguiente fragmento presenta los dos capítulos consecutivos que exponen la divina proporción en la obra de Pacioli. En el capítulo VII se describe perfectamente cómo reconocer una proporción áurea, y en el VIII cómo calcularla.

Se ha conservado el texto casi tal como fue escrito, lo que acarrea a un lector moderno ciertos inconvenientes. El principal es que la forma de expresión resulta hoy en día demasiado discursiva. Conocimientos elementales en la actualidad, que se enseñan en la escuela primaria, como la igualdad de fracciones, requiere de Pacioli penosos esfuerzos explicativos y el uso frecuente del concepto y la palabra proporción. En tiempos de Pacioli, rondando el año 1500, la notación matemática estaba todavía muy poco desarrollada y el concepto de fórmula era desconocido. Se puede observar en el texto la dificultad que todavía entraña en la época del autor expresar

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sólo con palabras, sin utilizar símbolos.

No obstante, si la lectura de este texto vale la pena, no es sólo por su importancia histórica en relación a la proporción áurea, sino precisamente como instantánea del estado de las matemáticas en una época pasada, lo que enriquece la panorámica de su evolución. Desde ese punto de vista, las figuras del insigne italiano, de sus contemporáneos, y aún más de sus antecesores, adquieren todavía mayor dimensión cuando se comprueba cómo tenían que moverse por fuerza entre los límites fijados por un lenguaje primitivo e inadecuado.

Capítulo VII

Del primer efecto de una línea dividida según nuestra proporción

Cuando una línea recta se divide según la proporción que tiene el medio y los extremos, pues así llaman los sabios a nuestra exquisita proporción, si a su parte mayor se agrega la mitad de toda la línea dividida proporcionalmente así, se seguirá de manera necesaria que el cuadrado de su conjunto siempre es quíntuplo, es decir, cinco veces mayor, del cuadrado de dicha mitad del total.

Antes de seguir adelante, hay que aclarar cómo debe entenderse e incluirse dicha proporción entre las cantidades y cómo la llaman los más sabios en sus obras. Pues digo que la llaman proportio habens et duo extrema, es decir, proporción que tiene el medio y dos extremos, que es lo que ocurre a todo ternario, pues cualquiera que sea el ternario elegido, tendrá siempre el medio con sus dos extremos, pues nunca se entendería el medio sin ellos. (...)

Cómo se entienden su medio y sus extremos

Entiendo cómo se designa nuestra proporción con su nombre particular, queda por aclarar cómo debe entenderse dicho medio y también los extremos en cualquier cantidad, y qué condiciones deben cumplir para que se dé entre ellos la divina proporción. Por eso, hay que saber que entre términos de un mismo género siempre hay, por necesidad, dos habitudes, es decir, proporciones; a saber, una entre el primer término y el segundo, otra entre el segundo y el tercero. Verbi gratia: sean tres cantidades del mismo género, que de otra manera no se entiende que haya entre ellos proporción, sea la primera a y sea 9 como número; la segunda sea b y 6; la tercera c y 4.

Digo que entre ellas hay dos proporciones, una de a y b, es decir, del 9 con el 6, la cual, entre las comunes, en nuestra obra llamamos sesquialtera, y es cuando el término mayor contiene al menor una vez y media, pues el 9 contiene al 6 y además al 3, que es la mitad de 6,

y por esto se llama sesquiáltera. (...) Sea, además, de la segunda, b, con la tercera, c, es decir, del 6 con el 4, otra proporción igualmente sesquiáltera. De si éstas son símiles o disímiles no nos preocupamos ahora, pues nuestra intención es sólo aclarar cómo entre tres términos de la misma especie deben darse necesariamente dos proporciones. Digo que, de igual modo, nuestra divina proporción observa las mismas condiciones; es decir, que siempre entre sus tres términos, el medio y los dos extremos, invariablemente contiene dos proporciones siempre de una misma denominación. Y esto, para las otras sean continuas o discontinuas, puede suceder de infinitos modos, pues a veces entre sus tres términos será duplo, otras veces triple, y sic in ceteris para todas las especies comunes. Pero entre el medio y los extremos de esta proporción nuestra no es posible que haya variaciones, como se dirá (...).

Por eso hay que saber, para reconocerla entre las cantidades que se presenten, que siempre entre sus tres términos se la encuentra dispuesta en proporcionalidad continua, de este modo: que el producto del menor extremo por la suma del menor y el medio es igual al cuadrado del medio, y en consecuencia, dicha suma será necesariamente su extremo mayor; y cuando se encuentren así ordenadas en tres cantidades de cualquier género, se dice que ellas están según la proporción que tiene el medio y dos extremos; su extremo mayor es siempre la suma del menor y el medio, y podemos decir que dicho extremo mayor es toda la cantidad dividida en aquellas dos partes, es decir, extremo menor y medio de ese conjunto de términos. Hay que notar por qué dicha proporción no puede ser racional, y por qué el extremo menor no puede nunca, con respecto al medio, denominarse por número alguno, siendo racional el extremo mayor; pues siempre serán irracionales, como abajo se dirá claramente. Y esto, de la tercera manera, concuerda con Dios, ut supra..

Capítulo VIII

Cómo se entiende la cantidad dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos.

Debemos saber que, considerándolo bien, esto de la división de una cantidad según la proporción que tiene el medio y dos extremos quiere decir: hacer de aquella cantidad dos partes desiguales tales que el producto de la menor por toda esa cantidad indivisa sea cuanto al cuadrado de la parte mayor. Pero, puesto el caso de que resultara molesto dividir dicha cantidad según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y se quisiera, en cambio, hacer dos partes tales que el producto de una por toda dicha cantidad sea igual al cuadrado de la otra parte, quien entienda bien y sea experto en el arte deberá reducir la proposición a dicha cantidad sea igual al cuadrado de la otra parte; deberá reducir la proposición a dicha proporción nuestra, pues de otra manera no puede in-

interpretarse. Así, a quien se le dijera: “hazme de 10 dos partes tales que, multiplicada una por 10, haga cuanto la otra multiplicada por sí misma”, tratando este caso y otros semejantes, según las indicaciones que hemos dado en la práctica especulativa llamada álgebra, y almucabala por otro nombre, y la regla que sobre este punto damos en dicha obra nuestra, encontrará como solución que una parte, es decir, la menor, es 15 menos raíz de 125 y la otra mayor es raíz de 125 menos 5. Y estas partes, así descritas, son irracionales, y en el arte se llaman residuos, cuyas especies son 6. Y vulgarmente dichas partes se enuncian así: la menor, 15 menos raíz de 125. Esto significa que, tomada la raíz de 125, que es poco más de 11, y sustraída de 15, quedará poco más de 3, o digamos, poco menos de 4. Y la mayor se enuncia: raíz de 125 menos 5; y quiere decir que, tomada la raíz del 125, que es poco más de 11, como se dijo, restándole 5, quedaría poco más de 6, o, digamos, poco menos de 7 para dicha parte mayor. Pero tales operaciones de multiplicar, sumar, sustraer, dividir residuos, binomios y raíces y todas las demás cantidades racionales e irracionales, enteras y quebradas, en todos los modos, por haberlos demostrado cabalmente en la citada obra nuestra, no me preocupa de repetirlas en este tratado, pues sólo se trata de decir cosas nuevas y no las ya dichas y reiteradas.

Dividida así toda cantidad, tendremos siempre tres términos ordenados en la proporcionalidad continua según la cual uno es toda la cantidad así dividida, es decir, el extremo mayor, como aquí, en el caso propuesto, 10; el otro es la parte mayor, es decir, el medio, como la raíz de 125 menos 5; y el tercero, la menor, es decir, 15 menos raíz de 125. Entre éstos hay la misma proporción, es decir, del primero al segundo como del segundo al tercero, y así a la inversa, del tercero al segundo como del segundo al primero. Y tanto da multiplicar el menor, es decir, 15 menos raíz de 125, por el mayor, que es 10, cuanto multiplicar el medio por sí mismo, es decir, raíz de 125 menos 5, pues tanto uno como otro producto da 150 menos raíz de 12.500, tal como busca nuestra proporción. Por esto se dice que 10 está dividido según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y su parte mayor es raíz de 125 menos 5, y la menor es 15 menos raíz de 125, siendo necesariamente una y otra irracionales. Y esto es todo lo que se refiere a la cantidad así dividida.

Elementos de Geometría, de Euclides

El Libro Sexto de los *Elementos*, de Euclides, contiene la teoría eudoxiana de la proporción a la geometría plana. En él se establecen los teoremas de los triángulos semejantes y las construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional. Es la primera aparición matemática documentada de la proporción áurea. Podemos encontrarla en la definición 3 en su expresión más clásica, como proporción entre «media y extrema razón», y en la proposición 30, donde se da un ejemplo de aplicación.

Libro Sexto

Definiciones

3. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.

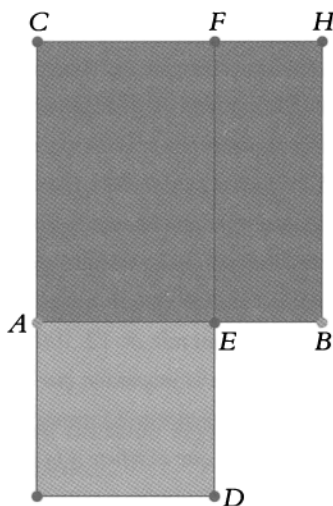
Proposiciones

Proposición 30. Dividir una recta finita dada en extrema y media razón.

Sea AB la recta finita dada.

Así pues, hay que dividir la recta AB en extrema y media razón.

Constrúyase a partir de AB el cuadrado BC y aplíquese a AC el paralelogramo CD igual a BC y que exceda en la figura AD semejante a BC .



Ahora bien, BC es un cuadrado; entonces AD es también un cuadrado. Y como BC es igual a CD , quítese de ambos CE ; entonces el paralelogramo restante BF es igual al paralelogramo restante AD . Pero son también equiángulos; entonces los lados que comprenden los ángulos iguales de los paralelogramos BF , AD son inversamente proporcionales; entonces, como FE es a ED , así AE a EB . Pero FE es igual a AB y ED a AE . Por tanto, como BA es a AE , así AE a EB . Pero AB es mayor que AE ; así pues, AE es también mayor que EB .

De esta manera, se ha dividido la recta AB en extrema y media razón por E y su segmento mayor es AE .

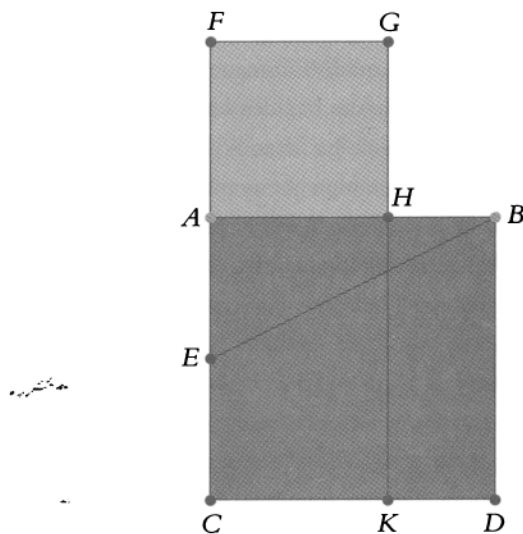
Aunque el Libro Sexto es el más conocido en su referencia a la proporción áurea, Euclides la hace aparecer ya en la proposición 11 del Libro Segundo, que pretende resolver de manera geométrica la ecuación $a(a - x) = x^2$. Básicamente, esta proposición es la misma que la proposición 30 del Libro Sexto, y su única diferencia es la terminología. Se podría decir que la 11 (II) es la primera proposición donde aparece la proporción áurea, pero el autor parece querer reservar esas cuestiones para más tarde. En este punto, las oculta bajo un problema de rectángulos. De todas maneras, con ello demuestra también que cualquier problema sobre proporciones entre líneas se puede convertir en un problema de áreas de rectángulos.

Libro Segundo

Proposición 11. Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Sea AB la recta dada.

Así pues, hay que dividir AB de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.



Pues constrúyase a partir de AB el cuadrado $ABDC$ y divídase en dos AC por el punto E y trácese BE y prolonguese CA hasta F ; y hágase EF igual a BE , y constrúyase a partir de AF el cuadrado FH , y prolonguese GH hasta K .

Pues como la recta AC ha sido dividida en dos por el punto E y se le ha añadido FA , entonces el rectángulo comprendido por CF , FA junto con el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EF . Pero EF es igual a EB ; por tanto, el rectángulo comprendido por CF , FA junto con el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EB . Pero los cuadrados de BA , AE son iguales al cuadrado de EB , porque el ángulo correspondiente a A es recto; por tanto, el rectángulo comprendido por CF , FA junto con el cuadrado de AE es igual a los cuadrados de BA , AE . Quítese de ambos el cuadrado de AE ; entonces el rectángulo restante comprendido por CF , FA es igual al cuadrado de AB . Ahora bien, el rectángulo comprendido por CF , FA es FK : porque AF es igual a FG ; pero el cuadrado de AB es AD ; por tanto, FK es igual a AD . Quítese de ambos AK ; entonces el cuadrado restante FH es igual a HA . Y HA es el rectángulo comprendido por AB , BH : porque AB es igual a BD ; pero FH es el cuadrado de AH ; por tanto, el rectángulo comprendido por AB , BH es igual al cuadrado de HA .

De esta manera, la recta dada AB ha sido dividida en H de modo que hace el rectángulo comprendido por AB , BH igual al cuadrado de HA .

Fibonacci y el *Liber abaci*

El *Liber abaci*, de Leonardo Pisano, llamado Fibonacci, era un libro de un volumen enorme, repleto de interesantes problemas basados en la aritmética y el álgebra que su autor había aprendido en sus viajes. La intención de Fibonacci era demostrar la utilidad del sistema decimal indoarábigo y sus numerales y favorecer su introducción en Europa. El primer párrafo de la obra supone la entrada en escena por primera vez en la historia de Occidente de los números tal y como se conocen hoy en día en todo el mundo.

Los nueve números indios son: 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Con estos nueve números, y con el signo cero, que los árabes llaman zephyr, puede escribirse cualquier otro número, como se demostrará más abajo. Un número es una suma de unidades, y a través de la adición de ellas, el número puede aumentar sin

fin. Primero aparecen estos números, que van del uno al diez. Después, de las decenas se construyen los números que van del diez hasta el cien. Después, de las centenas se construyen esos números que van del cien al mil... Y de esa manera, en una secuencia de pasos sin final, cualquier número se construye uniendo los números precedentes. El primer lugar en la escritura de los números está a la derecha. El segundo sigue al primero a la izquierda.

Como vemos, Fibonacci denominaba «indios» a los numerales indoarábigos. No obstante, los escribía de izquierda a derecha, siguiendo el sentido de la escritura árabe. La revolución que suponían estos numerales no era una cuestión meramente práctica. Con ellos, Fibonacci importaba un concepto muy poderoso, el cero. Como vemos, los árabes denominaban el cero con la palabra que acabaría significando «cifra»: *zephyr*.

En el capítulo XII de la misma obra aparece el problema que daría la gloria a Leonardo Pisano: el problema de la regeneración de conejos. A continuación se muestra el texto original, con las anotaciones al margen que incluía.

Principio, 1 Cierta hombre tenía una pareja de conejos juntos en un cercado, y quería saber cuántos conejos podían nacer de ella en un año, ya que, por su naturaleza, los conejos pueden alumbrar una pareja al mes, y cada nueva pareja puede ya alumbrar al mes siguiente.

Primer mes, 2 Cuando la primera pareja alumbra en el primer mes, el hombre dobla sus conejos; habrá 2 parejas en un mes.

Segundo, 3 Una de ellas, la que fue la primera, alumbra en el segundo mes, y así, en el segundo mes hay ya 3 parejas; de éstas, en un mes, dos están preñadas, por lo que en el tercer mes, nacen dos parejas de conejos, y así hay 5 parejas en ese mes; tres parejas están preñadas en el cuarto mes, por lo que hay 8 parejas en el mes cuarto, de las cuales, cinco parejas alumbran otras cinco parejas; éstas se añaden a las ocho anteriores sumando 13 parejas en el quinto mes; esas cinco parejas que han nacido este mes no se aparean, pero otras ocho parejas están preñadas, así hay 21 parejas en el sexto mes; a ellas hay que añadir las trece parejas que nacen en el séptimo mes, así que habrá 34 parejas en este mes; a ellas habrá que sumar las veintiuna parejas que nacen

Octavo, 55	en el octavo mes, llegando a 55 parejas en ese mes; habrá que añadirles treinta y cuatro parejas que nacen en el noveno mes y tendremos ya
Noveno, 89	89 parejas en ese mes; a éstas, se añaden otra vez las cincuenta y cinco
Décimo, 144	parejas nacidas en el décimo mes y ya habrán 144 parejas en ese mes; se sumarán a ellas una vez más las ochenta y nueve parejas nacidas
Undécimo, 233	en el mes undécimo, con lo que se habrá conseguido tener 233 parejas en ese mes. A éstas todavía se le añadirán las ciento cuarenta y cuatro
Duodécimo, 377	parejas que han nacido en el último mes. Al final de todo un año la pareja con que comenzamos habrá generado 377 parejas.

Se puede observar en el margen de qué manera hemos operado: hemos añadido el primer número al segundo, es decir, el 1 al 2, y el segundo al tercero y el tercero al cuarto y el cuarto al quinto, y así uno tras otro hasta que añadimos el décimo al undécimo, es decir el 144 al 233, y conseguimos la cantidad de conejos arriba expuesta, es decir 377, que se puede seguir aumentando durante una cantidad de meses sin fin.

La serie de números que presenta este problema y la proporción en que aumentan serían conocidos posteriormente como «la sucesión de Fibonacci», aunque su autor nunca supo que llevarían su nombre, puesto que no lo adquirió hasta muchos siglos después. De hecho, el propio Kepler menciona sus números en una publicación de 1611 describiendo sus proporciones de manera complicada: «como 5 es a 8, 8 es a 13, 13 es a 21».

Más de cien años más tarde, Jacques Binet (1786–1856) desarrolló una fórmula para hallar cualquier número de la sucesión de Fibonacci dada su posición en la secuencia. Con la fórmula de Binet se puede encontrar, por ejemplo, el número 118 de la sucesión de Fibonacci sin necesidad de calcular los anteriores. El desarrollo para llegar a la fórmula de Binet es bastante complejo, por eso se presentará con brevedad y entonces se mostrará un ejemplo de su efectividad.

Queda claro que la definición de la sucesión de Fibonacci es recurrente, es decir, que se necesitan calcular varios términos anteriores para encontrar con un término específico. Si los números de Fibonacci quedan definidos por las ecuaciones

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

estas ecuaciones definen la relación de recurrencia

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

El lector interesado puede recurrir al texto general del libro, donde se le conducirá paso a paso al cociente F_{n+1}/F_n y a su valor en el límite, llamado ϕ o sección áurea. También allí encontrará la expresión

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que es base de muchos cálculos aritméticos posteriores. Binet llegó a la fórmula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$$

de un modo bastante laborioso, que no reproduciremos aquí.

Sustituyendo el valor de ϕ en $\left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$ se consigue la fórmula en términos de números reales.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right] = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \right)^n \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Figura 1.1.1

Bibliografía

- CONWAY, J.H. y R.K. GUY: *The book of numbers*. Nueva York, Copernicus, 1996.
- CORBALÁN, F.: *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona, Graó, 1995.
- : *Números, Cultura y Juegos. Tu mundo y las matemáticas*. Madrid, Editorial Videocinco, 1996.
- : *Matemáticas de la vida misma*. Barcelona, Graó, 2007.
- GHYKA, M. C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Barcelona, Editorial Poseidón, S.L., 1977.
- : *El número de oro. I. Los ritmos. II. Los ritos*. Barcelona, Poseidón, 1978.
- HUNTLEY, H.E.: *The divine proportion. A study in mathematical beauty*. Nueva York, Dover Publications, 1970.
- LINN, C.F.: *The golden mean. Mathematics and the fine arts*. Nueva York, Doubleday & Company, Inc., 1974.
- LIVIO, M.: *La proporción áurea*. Barcelona, Ariel, 2006.
- MORENO, R.: *Fibonacci. El primer matemático medieval*. Madrid, Nivola, 2004.
- PACIOLI, L.: *La divina proporción*, Introducción A. M. González. Madrid, Akal, 1987.
- STEEN, L.A. ET AL.: *Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid, Addison-Wesley, UAM, 1999.
- WELLS, D.: *The Penguin dictionary of curious and interesting Geometry*. Londres, Penguin, 1991.

Índice analítico

ángulo áureo 131, 132

Bernoulli, Jacob 63

Botticelli, Sandro 107, 108

Brahmagupta 18

compás áureo 54, 55

construcción con regla y compás 67

cuadrado de un binomio 48

cuadratura del círculo 67

D'Arcy Thompson 125

dimensión fractal 136, 137

duplicación de un cubo 67

Durero, Alberto 105, 108, 109, 110

Elementos de Geometría 21, 22,

embaldosados

no periódicos 76

periódicos 76

Escher, Maurits C. 65, 81

espiral

áurea, de Durero o logarítmica 15,

63, 64, 107, 108, 118, 119

de Arquímedes 108, 128, 135

estrella pentagonal 68, 74, 75, 86, 87,
107

Euclides 21, 22, 147-150

Fechner, Gustav 95

Fermat, Pierre de 42

Fibonacci 31, 34, 38, 39, 40, 41, 150-153

Fidias 11, 13, 18, 23

filotaxis 127, 130, 132

fracciones 19

continuas 29, 30, 136

equivalentes 24, 29

fractal 136, 137, 140-142

Gauss, Carl Friedrich 68

Ghyka, Matila 75, 76, 121

gnomon 53, 60, 72, 74, 125, 126

áureo 72, 74

Holbein, Hans 111

Kandinsky, Vasili 111

Keops 113

Kepler, Johannes 129

Koch, Helge von 137, 138, 140

La Alhambra 79, 80

Le Corbusier 113, 119-122

límite de una sucesión 35

Mandelbrot, Benoît 136, 140

Merz, Mario 38

Miguel Ángel 107

Modulor 120, 121

Morley, Frank 70

mosaicos de Penrose 83-86

mosaicos

periódicos y no periódicos 76

semirregulares 76

nautilus 15, 128, 135

números

algebraicos 27

- irracionales 9, 19, 23
- metálicos 30
- naturales 19, 26, 30
- primos 21, 45
- racionales 19, 20, 29
- trascendentes 27

- Pacioli, Luca 96, 98, 116, 119, 122
- Palladio, Andrea 116
- Partenón 13, 23, 115
- partición en media y extrema razón
 - 23, 24, 47, 143-144
- Pascal, Blaise 44
- Penrose, Roger 83-85
- pentalfa 74, 75, 107
- Piero della Francesca 98, 107
- poliedro 88, 97, 98
 - dual 91
- polígono
 - inscrita 58
 - regular 58, 77
- progresión geométrica 26, 64, 139
- pulgada 51, 103

- Quételet, Lambert Adolphe 102

- rectángulo
 - $\sqrt{2}$ 54
 - áureo 12, 14, 47, 51, 95, 96
 - construcción 51, 55
 - propiedades 56
- cordobés 61
- de plata 61
- módulo k 50
- semejantes 49, 53

- Stradivarius 124
- sucesión 31, 34
 - de Fibonacci 31-41, 152

- teorema
 - de Euler 88
 - de Fermat 42
 - de Pitágoras 39, 48, 51, 56
- término general de una sucesión 28, 43
- ternas pitagóricas 41, 42
- tesela 76, 77, 84
- Tiwanaku 114
- triángulo áureo 72, 73
- trisección de un ángulo 67, 70

- Vinci, Leonardo da 96, 97, 100-103, 105, 108, 122
- Vitruvio, Marco 96, 101, 102, 116, 120

- Wiles, Andrew 42
- Wright, Frank Lloyd 117